

Error en las mediciones de oleaje en laboratorios de investigación

Luis Pastor Sánchez-Fernández

Instituto Politécnico Nacional

En los sistemas de medición digital es relevante la frecuencia de muestreo por su influencia en la exactitud de las mediciones. Su efecto es determinante cuando resulta necesario obtener los valores picos de la señal. Los métodos para mejorar la calidad del registro de datos adquiridos están relacionados con la operación del sistema en tiempo real o, si es admitido, tomar muestras y luego realizar su procesamiento. Se obtiene la relación entre la frecuencia de muestreo y el error máximo en la medición de una señal continua y sinusoidal, y en la determinación de sus valores picos, todo lo cual puede ser extendido para señales donde es relevante uno o varios armónicos fundamentales. Se ilustra el efecto de la interpolación de puntos en la serie de las muestras tomadas.

Palabras clave: oleaje, marítimas, muestreo, adquisición de datos, error, interpolación.

Introducción

El uso masivo de medios computarizados en los sistemas de medición impone nuevos estudios e investigaciones sobre los principales factores que influyen en la calidad de los mismos y en las particularidades de los análisis que se realizan con la información adquirida, por ejemplo, en hidráulica marítima (Stansell *et al.*, 2002). Uno de estos factores es la frecuencia de muestreo.

Mediante las expresiones matemáticas que se obtienen se podrá calcular el error máximo en las mediciones computarizadas de armónicos de una señal debido a la frecuencia de muestreo y, por tanto, poder calcular el error máximo total de las mediciones, en el cual influye además la exactitud del sensor (sobre la cual no se puede actuar), el error de cuantificación del conversor análogo/digital (puede ser reducido a valores despreciables con conversores A/D de 12 y 16 bits). Se tendrán criterios cuantitativos para seleccionar una frecuencia de muestreo que no represente una carga intensa (sólo la estrictamente necesaria) para el sistema de adquisición de datos (es una tarea periódica), el cual puede estar programado sobre un sistema operativo que no tiene que ser necesariamente de tiempo real, pudiendo

ser *Windows* o *LINUX*, como ocurre en la actualidad, cuando se trabaja con PC, lo cual es una tendencia en los sistemas de medición computarizados en laboratorio, lo que implica hacer un uso eficiente y racional del procesador central; de lo contrario sería necesario usar un *hardware* adicional, como una tarjeta de adquisición de datos inteligente (con procesador y sistema operativo propios) o dispositivos que permitan estructurar un sistema distribuido, lo cual encarece y hace más complejo el sistema. Resulta importante planear y programar correctamente dicho sistema; por ejemplo, para cada variable que se necesite medir, seleccionar una frecuencia de muestreo correcta (ni baja ni extremadamente alta), con lo cual se logrará eficiencia del sistema de medición (Oppenheim y Willsky, 1998).

El teorema del muestreo de Shannon (Ogata, 1998) establece la frecuencia angular de muestreo (W_m) mínima para reconstruir una señal continua $X(t)$ a partir de las muestras tomadas en periodos de tiempo T , denotando a $X^*(t)$ como la señal $X(t)$ digitalizada.

Considerando que $W_m = 2\pi/T$, siendo T el periodo de muestreo en segundos; para una señal sinusoidal $X(t) = A \sin(W_s t)$, siendo W_s la frecuencia angular de la señal $X(t)$, si W'_m es mayor o igual que $2W_s$, entonces la señal

continua en el tiempo $X(t)$ puede ser reconstruida a partir de las muestras tomadas por un dispositivo digital, tal como un sistema de adquisición de datos que utilice un conversor analógico/digital y una computadora personal, como se muestra en la ilustración 1.

Para una señal no sinusoidal, formada por numerosos armónicos, como es el caso de una señal de oleaje irregular, la frecuencia de muestreo tendría que ser mayor o igual que el doble de la mayor frecuencia de interés en el espectro de la señal que se está midiendo a través de sus muestras adquiridas en periodos de tiempo T . Poder reconstruir la señal continua a través de sus muestras no asegura la exactitud de esta reconstrucción.

Para seleccionar la frecuencia de muestreo existen diversos criterios prácticos, como es, por ejemplo, considerar la frecuencia pico (F_p) del espectro de la señal y tomar la frecuencia de muestreo (F_m) de acuerdo con la relación siguiente: $F_m \geq 8F_p$ (este criterio aparece recomendado para sistemas de medición y generación de oleaje irregular en laboratorios de investigación, Beresford, 1994) o tomar el periodo de muestreo entre una décima a una vigésima parte del periodo de la ola significativa (Goda, 2000).

No se han planteado relaciones matemáticas que permitan establecer de forma precisa el error máximo que puede producirse debido a la frecuencia de muestreo, lo que resulta importante cuando es necesario calcular el error de un sistema de medición en el cual influyen todos

los elementos que intervienen en el mismo, desde el sensor hasta el conversor análogo-digital y la frecuencia con la cual se tomen las muestras, como se presentó de forma simplificada en la ilustración 1. Se ha utilizado la notación F_m para la frecuencia de muestreo en Hertz (Hz), equivalentes a ciclos por segundos o a muestras por segundos.

Relación de la frecuencia de muestreo y el error

Se presenta un análisis en el cual se utiliza como entrada una señal sinusoidal, tal como puede ser considerado el oleaje regular o cuando en el espectro del oleaje irregular es predominante un armónico fundamental. Se determina el error máximo de las lecturas en función de la frecuencia de muestreo cuando se utiliza un fijador de orden cero; es decir, se toma una muestra de la señal y ésta mantiene su validez hasta el instante de tiempo en que se toma la próxima muestra.

Se cumple que el error máximo para procesamiento en tiempo real (para el cual sólo se tiene información en el instante de muestreo actual y en instantes anteriores) está dado por la expresión siguiente:

$$E_{\text{máxabs}} = \text{Máx} \left| x(k+1) - x(k) \right| \quad (1)$$

siendo:

$E_{\text{máxabs}}$ = error máximo absoluto de las lecturas.

$x(k)$, $x(k+1)$ = valores de la señal en el tiempo $t=kT$ y $t=(k+1)T$, respectivamente.

T = periodo de muestreo (tiempo entre la toma de las muestras de la señal continua).

k = valor entero (1, 2, 3...).

Podemos interpretar de la expresión 1 que el valor $X(k)$ será el valor representativo de la señal hasta que sea tomada la muestra siguiente, es decir, $X(k+1)$, es por ello que el $\text{máx} |x(k+1) - x(k)|$ puede ser considerado como el error máximo absoluto en tiempo real, producto de la frecuencia de muestreo de la señal. El error máximo se localiza de forma simétrica al origen de los ejes de coordenadas, donde se produce la mayor velocidad de cambio de la señal (como se muestra en la ilustración 2), señalándose como el error máximo absoluto $E_{\text{máxabs}}$, el cual se produce alrededor de los valores pico en tiempo real.

De la ilustración 2 se puede plantear que:

$$x(k+1) = A \sin(2\pi T / 2) \quad (2)$$

Ilustración 1. Esquema para la medición de oleaje.

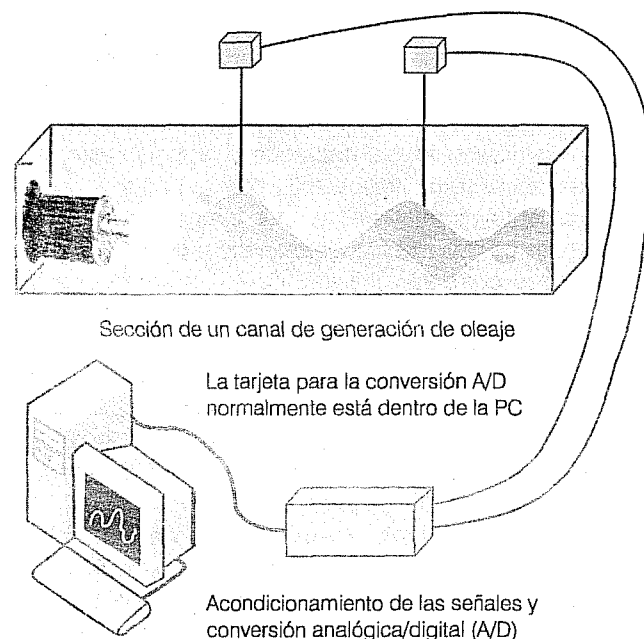
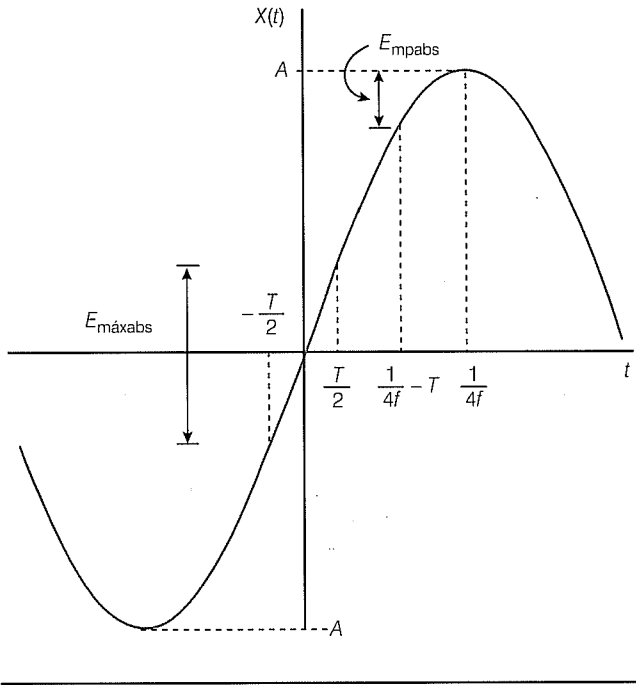


Ilustración 2. Error máximo absoluto en tiempo real para una señal sinusoidal (procesamiento causal).



$$X(k) = A \sin \left[2\pi f \left(-T/2 \right) \right] \quad (3)$$

$$E_{\text{máxabs}} = \left| A \sin \left(2\pi f T/2 \right) - A \sin \left[2\pi f \left(-T/2 \right) \right] \right|$$

$$E_{\text{máxabs}} = \left| 2 A \sin \left(2\pi f T/2 \right) \right|$$

$$E_{\text{máxabs}} = 2A \left| \sin \left(\pi f T \right) \right| \quad (4)$$

siendo:

$T = 1/F_m$ y F_m = frecuencia de muestreo. Al tomar $F_m = nf$, donde f es la frecuencia de la señal y n un entero mayor o igual que dos, se obtiene que:

$$E_{\text{máxabs}} = 2A \sin \left(\pi / n \right) \quad (5)$$

El error máximo relativo, respecto al valor pico a pico de la señal, expresado en porcentaje será:

$$E_{\text{máxrel}} = \frac{2A \sin \left(\pi / n \right)}{2A} \times 100 \quad (6)$$

$$E_{\text{máxrel}} = \sin \left(\pi / n \right) \times 100 \quad (7)$$

A continuación se realiza un análisis para formular las expresiones del error máximo que se produce alrededor de los valores picos en procesamiento en tiempo real (E_{mpabs}).

$$X(k+1) = A \sin \left(2\pi f (1/4f) \right) = A \sin \left(\pi / 2 \right) = A \quad (8)$$

$$X(k) = A \sin \left[2\pi f \left(1/4f - T \right) \right] \quad (9)$$

$$X(k) = A \sin \left[2\pi f \left(\frac{1 - 4fT}{4f} \right) \right]$$

$$X(k) = A \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - 4fT \right) \right]$$

$$\text{Se toma } T = \frac{1}{nf} \quad (10)$$

y se sustituye en la expresión anterior:

$$X(k) = A \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - 4f \frac{1}{nf} \right) \right] \quad (11)$$

$$X(k) = A \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n} \right) = A \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \quad (12)$$

$$E_{\text{mpabs}} = A - A \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \quad (13)$$

El error máximo relativo, respecto al valor pico a pico de la señal, expresado en porcentaje será:

$$E_{\text{mprel}} = \frac{A - A \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right)}{2A} \times 100 \quad (14)$$

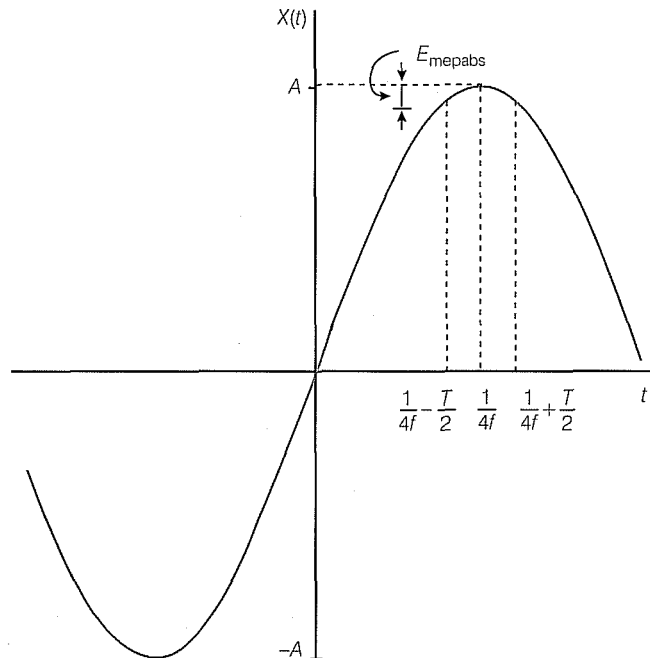
$$E_{\text{mprel}} = 0.5 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right] \times 100 \quad (15)$$

En hidráulica marítima y en otras aplicaciones en las cuales no se requiera realizar la mayoría de los cálculos en tiempo real, sino a partir de un registro de datos previamente adquiridos, lo más importante es determinar los máximos y mínimos de la señal, la cual puede ser considerada sinusoidal, o formada por un armónico fundamental y otros secundarios de pequeñas amplitudes; por tanto, en ese caso, el error máximo que se puede producir en la determinación de dichos valores se señala en la ilustración 3, denominándose E_{mepabs} como el error máximo estático absoluto en la determinación de los valores picos, el cual es un error en procesamiento no causal, pues se dispone de un registro de información previamente adquirida, y entonces, para un instante de muestreo considerado como el actual (instante k), se tiene información en instantes de muestreo anteriores y posteriores.

Este error se produce cuando ninguno de los valores de las muestras tomadas coincide con el valor del pico de la señal. Este error será el máximo cuando las distribución de las muestras antes y después del pico de la señal quedan distribuidas en la forma que se presenta en la ilustración 3; es decir, ambas muestras están equidistantes del valor pico.

$$E_{\text{mepabs}} = |X(k + 0.5) - X(k)| \quad (16)$$

Ilustración 3. Error máximo estático absoluto en la determinación de los valores picos (procesamiento no causal).



$$X(k + 0.5) = A \sin(2\pi f t / 4f) \quad (17)$$

$$X(k + 0.5) = A \sin(\pi / 2) = A \quad (18)$$

$$X(k) = A \sin[2\pi f t / 4f - T / 2] \quad (19)$$

$$X(k) = A \sin\left[2\pi f \frac{(1 - 2fT)}{4f}\right] = A \sin\left[\frac{\pi}{2}(1 - 2fT)\right]$$

Sustituyendo $T = \frac{1}{Fm} = \frac{1}{nf}$, la expresión queda como:

$$X(k) = A \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - 2f \frac{1}{nf}\right)\right] \quad (20)$$

$$X(k) = A \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = A \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (21)$$

$$E_{\text{mepabs}} = A - A \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (22)$$

El error máximo relativo, respecto al valor pico a pico de la señal, expresado en porcentaje será:

$$E_{\text{meprel}} = \frac{A - A \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2A} \times 100 \quad (23)$$

$$E_{\text{meprel}} = 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] \times 100 \quad (24)$$

Evaluando las expresiones 7, 15 y 24, para frecuencias de muestreo, que sean n veces la frecuencia de la señal sinusoidal, se obtienen los resultados del cuadro 1. La exactitud obtenida es válida cuando se trata de reconstruir completamente la señal continua en el tiempo $X(t)$ a partir de las muestras tomadas, usando un fijador de orden cero. La exactitud en procesamiento en tiempo real para el $E_{\text{máxrel}}$ pudiera interpretarse como el retardo máximo en percibir el valor real que tiene la señal. De manera similar, el E_{mprel} sería el retardo máximo, pero en valores cercanos a los picos de la señal. Sin embargo, E_{meprel} sí representa

Cuadro 1. Comparación de los errores relativos en función de la frecuencia de muestreo.

n	$E_{\text{máxrel}}$ (%)	E_{mprel} (%)	E_{meprel} (%)
2	100	100	50
4	70.71	50	14.64
8	38.26	14.64	3.8
10	30.9	9.54	2.44
20	15.64	2.44	0.61
50	6.27	0.39	0.098
100	3.14	0.098	0.024
200	1.57	0.024	0.0061
300	1.04	0.0109	0.0027

el error máximo relativo que puede producirse en procesamiento no causal cuando se desean determinar los valores pico de la señal.

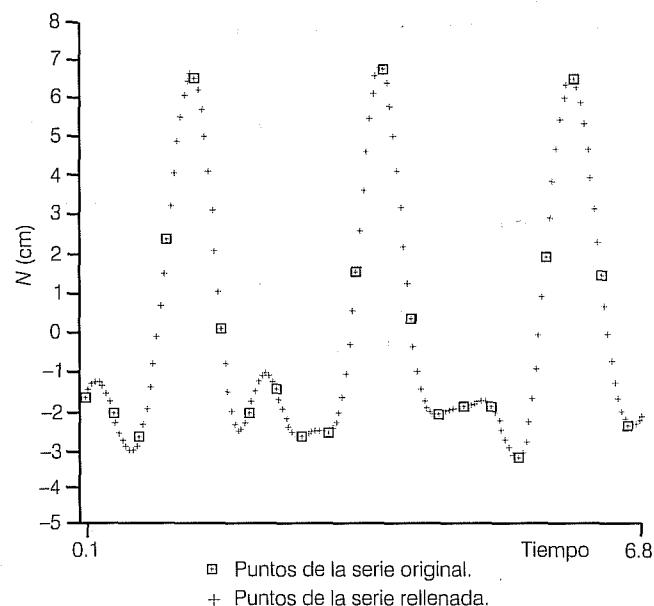
Disminuyendo el error debido a una baja frecuencia de muestreo

Pueden aplicarse métodos que permitan recobrar la señal continua a partir de sus muestras, lográndose mejorar la exactitud de su reconstrucción sin necesidad de elevar considerablemente su frecuencia de muestreo. Dentro de estos métodos se puede utilizar la interpolación de puntos en la serie temporal (valores muestreados) que sean compatibles con el vector complejo de dicha serie (interpolación compleja) y la interpolación de *splines* cúbicos (*spline interpolation*) (Emery y Thomson, 2001), entre otros.

Ilustración del efecto de la interpolación de puntos en la serie de muestras tomadas

La ilustración 4 muestra parte de la gráfica del nivel del agua contra el tiempo para una señal de oleaje producida en un canal de generación en un laboratorio. La serie original fue muestreada a 3 Hz y la serie rellenada con factor $F_r = 8$; es decir, fueron insertados siete puntos entre cada dos muestras de la serie original. Se obtiene un efecto aproximado equivalente a haber utilizado una frecuencia de muestreo para la serie original de 24 Hz.

Al utilizar un mayor número de olas para el análisis estadístico del oleaje (Goda, 2000) existe una mayor probabilidad de introducir una reducción adicional en el error asociado con la frecuencia de muestreo. Se recomiendan unas 120 olas, aproximadamente.

Ilustración 4. Ejemplo de interpolación compleja.

Conclusiones

Las expresiones 7, 15 y 24 permiten calcular el error máximo relativo producido al muestrear una señal continua y sinusoidal, válido para una señal de oleaje regular o para el armónico fundamental del oleaje irregular. Este error puede ser considerado un indicador de la exactitud debido a la frecuencia de muestreo cuando se trata de reconstruir completamente la señal continua en el tiempo $X(t)$ a partir de las muestras tomadas, usando una reconstrucción tipo escalera o fijador de orden cero.

$E_{\text{máxrel}}$ es la exactitud en procesamiento causal (común en aplicaciones de tiempo real) y puede interpretarse como el retardo máximo en percibir el valor real que tiene la señal. De manera similar, el E_{mprel} sería el retardo máximo, pero en valores cercanos a los picos de la señal. Sin embargo, E_{meprel} representa el error máximo relativo que puede producirse en procesamiento no causal cuando se desean determinar los valores pico de la señal.

Para señales de oleaje donde la mayor frecuencia de interés en su espectro es inferior a los 2 Hz es recomendable tomar una frecuencia de muestreo mínima entre 18 y 20 Hz, lo que equivale a unas diez muestras por cada ciclo (o longitud de onda) del armónico de mayor frecuencia.

Es evidente que a un mayor número de olas (aparece recomendado en la literatura usar unas 120) es posible reducir el error en los cálculos estadísticos, pues éstos

se basan en utilizar las olas mayores y habrá mayor cantidad de olas con probabilidad de que sus valores picos reales coincidan con puntos muestreados.

Recibido: 05/03/2002
Aprobado: 20/05/2003

Referencias

- BERESFORD, P.J. *Wavegen-Wave generator control software program. User manual*. Oxfordshire, Inglaterra: Howbery Park, Wallingford, 1994, 130 pp.
- EMERY, J. y THOMSON, R. *Data analysis methods in physical oceanography*. Amsterdam: Elsevier, 2001, 638 pp.
- GODA, Y. *Random seas and design of maritime structures. Advanced series on ocean engineering*. Vol. 15. Singapur: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000, 443 pp.
- OPPENHEIM, A.V. y WILLSKY, A. *Señales y sistemas*. Segunda edición. México, D.F.: Prentice-Hall, Inc., Hispanoamericana, 1998, 956 pp.
- OGATA, K., *Ingeniería de control moderna*. México, D.F.: Prentice Hall, 1998, 930 pp.
- STANSELL, P., WOLFRAM, J. y LINFOOT, B., Effect of sampling rate on wave height statistics. *Ocean engineering*. Vol. 29, núm. 9, Oxford, 2002, pp. 1023-1047.

Abstract

SÁNCHEZ-FERNÁNDEZ, L.P. Wave measurement error in research laboratories. Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. XIX, no. 2, April-June, 2004, pp. 101-106.

In digital measurement systems, the sampling frequency is essential, due to their influence in measurement accuracy. Their effect is decisive when it is necessary to obtain the peak values of the signal. The methods to improve the quality of the acquired data are related to the system's operation in real time or if it is admitted to acquire samples and later on perform the data analysis. In this paper, the relationship between the sampling frequency and the measurement's maximum error is obtained to sinusoidal continuous signals. This relationship can be extended for signals where one or several fundamental harmonics are outstanding. By means of an analytic procedure, the mathematical expressions are obtained and maximum error is determined for the peak values measurement. The effect of the interpolation of points is illustrated using the Fast Fourier Transform method.

Keywords: swell, maritimes, sampling, data acquisition, error, interpolation.

Dirección institucional del autor:

Dr. Luis Pastor Sánchez-Fernández

Centro de Investigación en Computación del
Instituto Politécnico Nacional (IPN),
Avenida Juan de Dios Bátiz s/n,
Esquina Miguel Othón de Mendizábal,
Colonia Nueva Industrial Vallejo,
07738 México, D.F.,
Teléfono: + (52) (55) 5729 6000, extensión 56573,
lsanchez@cic.ipn.mx.