

# Escalamiento de las ecuaciones del flujo del agua subterránea mediante filtrado de Butterworth

Álvaro A. Aldama  
Miguel Á. Mejía

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Roger Beckie

University of British Columbia, Canadá

*El flujo de agua y el transporte de solutos en medios geológicos se desarrollan en muchas escalas de longitud (poros del orden de milímetros hasta regiones que tienen kilómetros de longitud). Por lo mismo, hay escalas demasiado pequeñas para ser resueltas mediante un modelo o para ser observadas con los aparatos convencionales de medición. Aun cuando no es factible desarrollar modelos que resuelvan todas las escalas significantes, sí es posible desarrollar modelos de la dinámica de las escalas grandes. Estos modelos de escala grande no requieren la descripción explícita de las escalas pequeñas, pero deben incluir el efecto de las escalas pequeñas en la dinámica de las escalas grandes. La incorporación de tales efectos requiere la solución de un problema de cerradura. Por medio del uso de filtros de Butterworth se desarrolla una solución exacta para el problema de cerradura para el flujo del agua en un medio poroso con gran heterogeneidad. Se incluyen pruebas numéricas que validan los resultados teóricos.*

**Palabras clave:** flujo en medios porosos, escalas grandes, escalas pequeñas, problema de cerradura, filtro de Butterworth.

## Introducción

El carácter altamente heterogéneo de las propiedades del suelo genera la presencia de una multitud de escalas de longitud en las variables de interés presentes en los procesos de flujo y transporte en el agua subterránea. Dado que las ecuaciones que representan estos procesos por lo general se resuelven numéricamente, se debe introducir una discretización espacial. El teorema de muestreo implica que las escalas que son más pequeñas que dos veces el tamaño de la malla no pueden ser resueltas por un modelo numérico. El uso de mallas extremadamente refinadas demanda cargas computacionales excesivas. Aun si fuera posible superar las limitaciones computacionales, sería prácticamente imposible obtener la información asociada con las escalas pequeñas del flujo. Por lo tanto, es de interés práctico desarrollar modelos de las escalas grandes que están presentes en las variables del flujo. El proceso de transformar una ecuación que tiene todas las escalas signifi-

cativas en una ecuación que gobierna el comportamiento de las escalas grandes es comúnmente conocido como escalamiento (*upscaling* en inglés). Las ecuaciones escaladas no deberían contener la dinámica de las escalas pequeñas explícitamente, sino solamente el efecto que las escalas pequeñas producen en la dinámica de las escalas grandes. La naturaleza de los procesos de flujo y transporte conlleva que, cuando se intenta determinar este efecto, surge un problema de cerradura.

El problema de escalamiento ha sido abordado por otros investigadores empleando el enfoque estocástico (e.g. Gelhar, 1993). Dicho enfoque está basado en la suposición de que los procesos de flujo y transporte en aguas subterráneas poseen un comportamiento ergódico. Evidentemente, una condición necesaria para la ergodicidad es la homogeneidad estadística. Los procesos de flujo y transporte suelen no ser estadísticamente homogéneos. Por ejemplo, se sabe que la concentración de un soluto en una pluma contaminante transportada en un acuífero será estadísticamente homogénea sólo si

la dimensión transversal de la pluma es mucho mayor que la escala de longitud característica de las fluctuaciones de concentración. Frecuentemente, dicha condición no se satisface en la práctica (Dagan, 1994). Por tanto, la hipótesis de ergodicidad es débil. Además, el enfoque estocástico descansa en metodologías fenomenológicas para la determinación de propiedades materiales efectivas, como la conductividad, la transmisividad, el coeficiente de almacenaje y la dispersividad. Dichas metodologías se basan en consideraciones de carácter semiempírico, cuya validez general es dudosa. Asimismo, el enfoque estadístico-fenomenológico asocia escalas de longitud características de las propiedades materiales, tales como las respectivas longitudes de correlación, que dependen del comportamiento estadístico de dichas propiedades. El cálculo de esas longitudes —que a su vez determinan la estructura tanto de las correlaciones o covariancias espaciales como de los espectros de las propiedades materiales— requiere información que usualmente no está disponible en la práctica, lo cual dificulta la aplicación del enfoque en comento.

El primer autor de este artículo y sus colaboradores han estado trabajando en el desarrollo de un enfoque alternativo al problema de escalamiento, que lo aborda directamente, sin requerir de la hipótesis ergódica ni de modelos fenomenológicos (Aldama, 1992; Beckie *et al.*, 1996a, Beckie *et al.*, 1996b). Dicho enfoque se basa en el uso de filtros espaciales y es similar al que se usa en las simulaciones de turbulencia (Aldama, 1990). En este trabajo se presenta el desarrollo de las ecuaciones que describen la dinámica de las escalas grandes de flujos de agua subterránea. Se introduce la familia de filtros de Butterworth, que es utilizada en el análisis de señales digitales (Stearns, 1975). En particular, se emplea el filtro de Butterworth de primer orden, que permite resolver el problema de cerradura en forma exacta. Mediante la realización de experimentos numéricos, se llevaron a cabo pruebas *a priori* y *a posteriori* para validar la aplicación de la teoría presentada a la simulación de medios porosos altamente heterogéneos.

### Ecuaciones de movimiento

Se supone que el agua está fluyendo en un medio poroso saturado con una matriz rígida de suelo. Por tanto, en ausencia de fuentes o sumideros, el principio de conservación de masa toma la forma de la siguiente ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial Q_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

donde  $Q_j$  representa el vector de flujo y  $x_j$ , el vector de posición. Si se supone que el flujo es darciano en las escalas de interés y que el medio es isotrópico, se tiene la siguiente relación constitutiva:

$$Q_j = -K \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (2)$$

donde  $K = K(x_\ell)$  representa la conductividad hidráulica y  $H$ , la carga piezométrica. La ecuación (2) es una expresión de la célebre ley de Darcy.

Combinando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene la conocida ecuación de flujo del agua subterránea:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( K \frac{\partial H}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3)$$

### Interacción de escalas

La interacción de las diferentes escalas de longitud presentes en el agua subterránea se entiende mejor en el espacio de Fourier. Por tanto, se introducirá la transformada al espacio de Fourier de una función que depende de las coordenadas espaciales,  $F = F(x_j)$ , en la siguiente forma:

$$\hat{F}(k_\ell) = \int F(x_\ell) \exp(ik_j x_j) d\mathbf{x} \quad (4)$$

Donde, a partir de ahora, el circunflejo representa la transformación de Fourier; el signo de integral, la integración sobre un dominio tridimensional no acotado;  $k_j$ , el vector de número de onda, y  $d\mathbf{x} \equiv dx_1 dx_2 dx_3$ . Si el dominio de interés es acotado, se supone que  $F$  y todas las variables relevantes se extienden apropiadamente fuera del dominio.

Tomando la transformada de Fourier de la ecuación (2) y empleando el teorema de la convolución, se obtiene:

$$\hat{Q}_j(k_\ell) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \hat{K}(k_\ell - k'_\ell) k'_j \hat{H}(k'_\ell) d\mathbf{k}' \quad (5)$$

donde  $d\mathbf{k}' \equiv dk'_1 dk'_2 dk'_3$ . Por tanto, todas las escalas (números de onda) presentes en  $K$  interactúan con todas las escalas presentes en  $H$  para producir las escalas de  $Q_j$ . Esta interacción es particularmente significativa cuando  $K$  posee un espectro muy ancho, *i.e.*, cuando el campo de conductividad es muy heterogéneo.

### Metodología de filtrado espacial

En el marco de un método de filtrado espacial, las componentes de “escala grande” (*eg*) de una variable  $F = F(x_j)$  son definidas por la siguiente operación de convolución (Aldama, 1990 y 1992):

$$\bar{F}(x_\ell) = \int G(x_\ell - x'_\ell) F(x'_\ell) dx' \quad (6)$$

donde, a partir de ahora, la barra superior representa la operación de filtrado dada por (6) y  $G$  es una función de filtrado que posee las siguientes propiedades:

$$\int G(x_\ell) dx = 1 \quad (7)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} D_x^\alpha G = 0 \quad \forall \alpha \quad (8)$$

$$\lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} D_k^\alpha \hat{G} = 0 \quad \forall \alpha \quad (9)$$

donde  $D_x^\alpha$  y  $D_k^\alpha$  representan operadores diferenciales definidos como:

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{\Sigma\alpha}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \quad (10)$$

$$D_k^\alpha = \frac{\partial^{\Sigma\alpha}}{\partial k_1^{\alpha_1} \partial k_2^{\alpha_2} \partial k_3^{\alpha_3}} \quad (11)$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  representa un multi-índice,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  son enteros no negativos y  $\Sigma\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

La propiedad (7) implica que  $G$  preserva la media y la propiedad (8) es necesaria para demostrar que la operación de filtrado conmuta con derivadas espaciales de orden arbitrario. La implicación de la propiedad (9), así como la importancia de la operación de filtrado, se comprenden mejor en el espacio de Fourier.

Transformando la ecuación (6) al espacio de Fourier se obtiene:

$$\hat{F}(k_\ell) = \hat{G}(k_\ell) \hat{F}(k_\ell) \quad (12)$$

La propiedad (9) implica, para  $\alpha = \mathbf{0}$ , que las componentes de número de onda altas de  $\hat{F}$  (componentes altamente fluctuantes) son eliminadas (gradualmente si  $\hat{G}$  posee un soporte no acotado, o totalmente si  $\hat{G}$  posee un soporte acotado) a través de la operación de filtrado.

### El problema de cerradura y localización

Filtrando la ley de Darcy (2) y la ecuación de flujo de agua subterránea (3), y tomando en cuenta el hecho de que, gracias a la propiedad (8), la operación de filtrado conmuta con las derivadas espaciales, se obtiene:

$$\bar{Q}_j = -\bar{K} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{K} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (14)$$

Expresando la conductividad, el flujo y la carga en términos de sus componentes de escala grande (*eg*), denotadas con sobreparrilla y definidas a través de la operación de filtrado (6), y de escala pequeña (*ep*), denotadas por medio de letras minúsculas, se tiene que:

$$K = \bar{K} + k \quad (15)$$

$$Q = \bar{Q} + q \quad (16)$$

$$H = \bar{H} + h \quad (17)$$

La substitución de las expresiones (15)-(17) en las ecuaciones (13) y (14) resulta en:

$$\bar{Q}_j = -\bar{K} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} = -\bar{K} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} - \bar{K} \frac{\partial h}{\partial x_j} - k \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} - k \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (18)$$

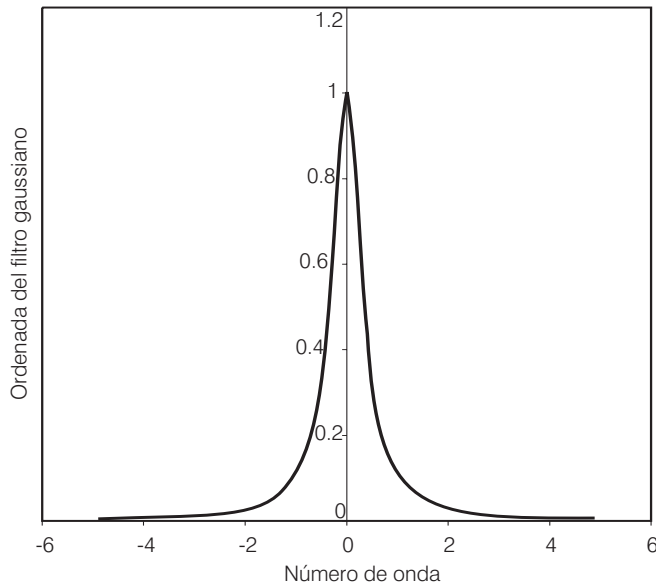
$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{K} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} + \bar{K} \frac{\partial h}{\partial x_j} + k \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} + k \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (19)$$

El primer término en la ecuación (18) representa la interacción *eg-eg* (escala grande-escala grande); el segundo y tercer términos, la interacción *eg-ep* (escala grande-escala pequeña), y el cuarto, la interacción *ep-ep* (escala pequeña-escala pequeña). El problema de cerradura se muestra claramente en la expresión (19), que representa la ecuación de agua subterránea escalada. Los términos de interacción *eg-ep* y *ep-ep* contienen variables de escala pequeña. Para cerrar la ecuación (19) es necesario expresar estos términos exclusivamente en términos de variables de escalas grandes. También es necesario que los términos de interacción *eg-eg* se expresen localmente, debido a que, en vista de la definición de la operación de filtrado a través de la expresión (6), su naturaleza le da a la ecuación (19) un carácter integrodiferencial.

### Metodología de filtrado espacial gaussiano

Aldama (1992) y Beckie *et al.* (1996a y 1996b) han empleado un filtro gaussiano que, en el espacio de Fourier, tiene la forma (véase ilustración 1):

**Ilustración 1. Filtro gaussiano en el espacio de Fourier.**



$$\hat{G}(k_f) = \hat{G}_G(k) = \exp\left(-\frac{\lambda^2 k^2}{24}\right) \quad (20)$$

donde  $\lambda$  es el ancho de filtro y  $k \equiv (k_\ell k_\ell)^{1/2}$ . Una expansión en serie de Taylor de  $\hat{G}_G$  resulta en:

$$\hat{G}_G(k) = 1 - \frac{\lambda^2 k^2}{24} + \frac{\lambda^4 k^4}{576} + O(\lambda^6) \quad (21)$$

Substituyendo (21) en (12), empleando el resultado de (18) y usando el teorema de diferenciación de Fourier, se obtiene la siguiente expresión (Aldama, 1992; Beckie et al., 1996a):

$$\begin{aligned} \bar{Q}_j = -K \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} = -\bar{K} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} - \frac{\lambda^2}{12} \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_j} \\ - \frac{\lambda^4}{288} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_m} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_m \partial x_j} + O(\lambda^6) \end{aligned} \quad (22)$$

Aplicando la expresión (22) a la ecuación (14) se obtiene la ecuación de flujo del agua subterránea de escala grande localizada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{K} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} \right) \\ = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\lambda^2}{12} \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_j} + \frac{\lambda^4}{288} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_m} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_m \partial x_j} \right) + O(\lambda^6) \end{aligned} \quad (23)$$

Mientras que el ancho de filtro,  $\lambda$ , sea mucho más pequeño que la escala de longitud dominante en las variables de eg,  $\Lambda$ , se esperaría que los términos de  $O(\lambda^6)$  fueran despreciables en la ecuación (23). Por tanto, una vez que esos términos se hubieren despreciado, se esperaría que la tasa de convergencia de la norma del error de la solución de la ecuación (23),  $\bar{H}$ , fuera de orden sexto en  $\lambda$ . Es de notar también que las ecuaciones de eg contienen derivadas de alto orden. Por esta razón, cabría esperar la necesidad de condiciones de frontera adicionales para resolver las ecuaciones. Sin embargo, Beckie et al. (1996b) aplicaron con éxito un método de perturbación regular que no requiere condiciones de frontera adicionales.

Aunque Beckie et al. (1996b) obtuvieron resultados numéricos muy alentadores en la solución de las ecuaciones de escala grande del agua subterránea, para campos de conductividad altamente heterogéneos, no se obtuvo la tasa teórica de convergencia del error que se esperaba. Esto se atribuyó al hecho de que cuando la expansión (21) se trunca, lo cual es equivalente a despreciar términos proporcionales a cierta potencia de  $\lambda$  en (23), la función del filtro gaussiano se aproxima mediante un polinomio en el espacio de Fourier. Este tipo de aproximaciones es muy precisa en números de onda bajos, pero se degrada significativamente en números de onda altos. De hecho, por definición, el filtro gaussiano es definido-positivo, mientras que las aproximaciones polinomiales que surgen de la expansión de Taylor no lo son. Aun más, estas aproximaciones no satisfacen la propiedad (9), dado que su magnitud no tiende a cero para  $k \rightarrow \infty$ . Estas observaciones llevaron a buscar alternativas a la aproximación polinomial del filtro gaussiano que dieran una mejor solución al problema de cerradura y localización de las ecuaciones de escala grande (18) y (19).

### La metodología de filtrado de Butterworth y la solución del problema de cerradura

La principal ventaja de aplicar una aproximación polinomial al filtro gaussiano es que, en el espacio de Fourier, la variable de eg,  $\hat{F}$ , se expresa como el producto de un polinomio de grado par en  $k$  por la variable primitiva  $\hat{F}$ . Esto permite el uso del teorema de diferenciación de Fourier cuando se invierte tal expresión. De esta manera, un término que involucra una potencia par en  $k$  multiplicado por  $\hat{F}$  se convierte, después de invertirlo, en una potencia par del operador  $\nabla$  aplicado a  $F$ . Por tanto, una aproximación polinomial del filtro gaussiano en el espacio de Fourier permite expresar  $F$  en términos de  $\bar{F}$  y de sumandos proporcionales a potencias pares del producto  $\lambda \nabla$  aplicados a  $\bar{F}$ . Estos términos son presumiblemente pequeños en comparación con  $\bar{F}$ , por lo que se

puede aplicar un método basado en una substitución iterada que permite la derivación de expresiones como (22) y (23) Sin embargo, como se señaló antes, la falta de propiedades como la definición-positiva y el decaimiento en el infinito en las aproximaciones polinomiales del filtro gaussiano motivó a los autores a encontrar un filtro alternativo que preservara las ventajas de dicho filtro, pero que no tuviera las desventajas de las aproximaciones polinomiales.

Los filtros que se proponen en este trabajo son los de Butterworth, los cuales están definidos por la siguiente expresión en el espacio de Fourier (Stearns, 1975):

$$\hat{G}_{B,N}(k) = \frac{1}{\left[1 + \eta_N^2 \left(\frac{k}{k_c}\right)^{2N}\right]} \quad (24)$$

donde  $N$  es un número entero que representa el orden del filtro;  $k_c$ , un número de onda de corte, y  $\eta_N$  es un parámetro relacionado con la tasa de decaimiento del filtro, en sentido que  $k > k_c \Rightarrow \hat{G}_{B,N}(k) < 1/(1 + \eta_N^2)$ . Como se puede observar en (24),  $\hat{G}_{B,N}$  es definido-positivo. También se puede demostrar que cuanto más alto es el valor de  $N$ ,  $\hat{G}_{B,N}$  se aproxima más y más a un filtro ideal de paso bajo (Stearns, 1975). Finalmente,  $\hat{G}_{B,N}$  también satisface las propiedades (7)-(9). Es interesante notar que el filtro propuesto corresponde a la función característica de una distribución de Laplace, con parámetro de localización coincidente con la media y el parámetro de escala dado en términos del número de onda de corte.

Hasta el momento se ha investigado el uso del miembro más simple de la familia de Butterworth, esto es, el filtro de orden uno, correspondiente a  $N=1$ . Asimismo, se eligió la siguiente opción para los parámetros del filtro:

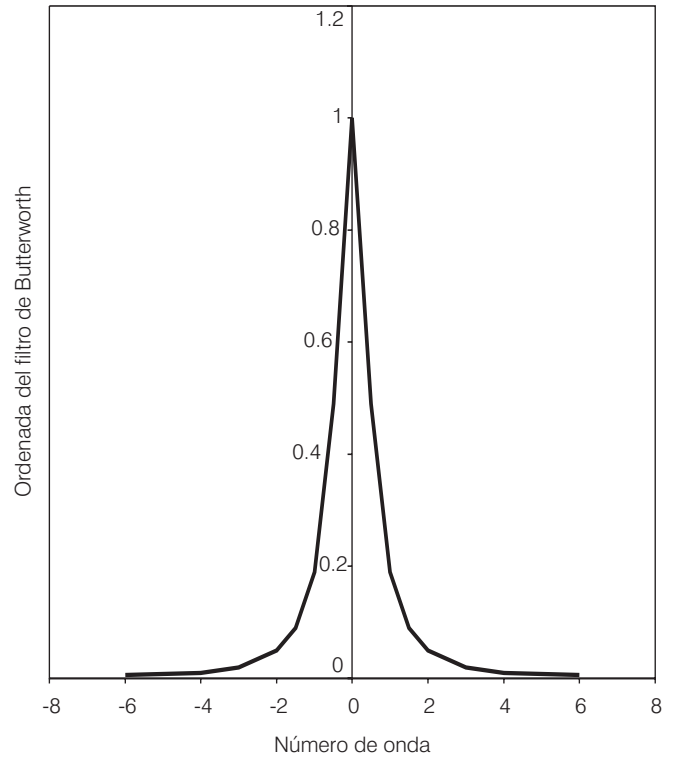
$$\left(\frac{\eta_1}{k_c}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{24} \quad (25)$$

De esta manera, substituyendo (25) en (24), con  $N=1$ , se obtiene la siguiente expresión para la función del filtro a ser aplicada de aquí en adelante (ilustración 2):

$$\hat{G}(k) = \hat{G}_{B,1}(k) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2 k^2}{24}} \quad (26)$$

La razón para elegir la opción (25) es que la expresión que resulta para el filtro, (26), se puede considerar como la aproximación de Padé (0,2) del filtro gaussiano (20). No obstante, a partir de este momento, la expresión (26) debe ser vista como una redefinición de la función de filtrado y no como una aproximación.

**Ilustración 2. Filtro de Butterworth en el espacio de Fourier.**



Substituyendo la expresión (26) en la ecuación (12), y resolviendo para  $\hat{F}$  resulta:

$$\hat{F} = \hat{\bar{F}} + \frac{\lambda^2 k^2}{24} \hat{\bar{F}} \quad (27)$$

Invirtiendo (27) se obtiene:

$$\bar{F} = \hat{\bar{F}} - \frac{\lambda^2}{24} \frac{\partial^2 \hat{\bar{F}}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \quad (28)$$

Como se puede observar, el uso de un filtro de Butterworth permite derivar un resultado más conveniente que el que se obtiene aplicando el filtro gaussiano. En efecto, (28) expresa en forma exacta una variable primitiva en términos de la variable de eg y su laplaciano.

Empleando (28) para la conductividad hidráulica y el gradiente de la carga se tiene:

$$K = \bar{K} - \frac{\lambda^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \quad (29)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} - \frac{\lambda^2}{24} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_j} \quad (30)$$

Substituyendo (29) y (30) en (13) resulta:

$$\bar{Q}_j = \left( \bar{K} - \frac{\lambda^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right) \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} - \frac{\lambda^2}{24} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_j} \right) \quad (31)$$

Substituyendo ahora (31) en la ecuación de continuidad de eg,  $\partial \bar{Q}_j / \partial x_j = 0$  resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \bar{K} + \frac{\lambda^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right) \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} + \frac{\lambda^2}{24} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_j} \right) \right] = 0 \quad (32)$$

La expresión (32) representa la ecuación del flujo del agua subterránea de eg, la cual se ha cerrado *exactamente*. Sin embargo, (32) no es local, dado que la barra superior representa la operación de convolución. Por tanto, dicha ecuación posee un carácter integrodiferencial.

La ecuación (28) se puede resolver para  $\bar{F}$  expresándola como la suma de  $F$  y un residuo de  $O(\lambda^2)$ . Con base en esta observación se puede realizar el producto en (31) y (32), y los cuatro términos filtrados que resultan se pueden expresar en términos de su contraparte no filtrada más un residuo de  $O(\lambda^2)$ . La operación se puede repetir una y otra vez, lo que genera un procedimiento de substitución iterada. Su aplicación a (31) y (32) da como resultado respectivo las siguientes expresiones de eg para la ley de Darcy y la ecuación del agua subterránea, que son *localizadas* (hasta los términos de  $O(\lambda^4)$ ), *cerradas* y *exactas*:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_j = & -\bar{K} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} - \frac{\lambda^2}{12} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \\ & - \frac{\lambda^4}{576} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_m \partial x_m \partial x_j} - \frac{\lambda^4}{144} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_m} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_m \partial x_j} \\ & + \frac{\lambda^4}{288} \left( \frac{\partial^3 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_m} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x_m \partial x_j} + \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_\ell} \frac{\partial^4 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_m \partial x_m \partial x_j} \right) \\ & + \frac{\lambda^6}{13824} \left[ \frac{\partial^6}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_m \partial x_m \partial x_n \partial x_n} \left( \bar{K} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} \right) \right. \\ & + \frac{\partial^4}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_m \partial x_m} \left( \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_n \partial x_n} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} + \bar{K} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_n \partial x_n \partial x_j} \right) \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_m \partial x_m} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_n \partial x_n \partial x_j} \right) \right] \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{K} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} + \frac{\lambda^2}{12} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right. \\ & + \frac{\lambda^4}{576} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_m \partial x_m \partial x_j} + \frac{\lambda^4}{144} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_m} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_m \partial x_j} \\ & + \frac{\lambda^4}{288} \left( \frac{\partial^3 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_m} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x_m \partial x_j} + \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_\ell} \frac{\partial^4 \bar{H}}{\partial x_\ell \partial x_m \partial x_m \partial x_j} \right) \\ & + \frac{\lambda^6}{13824} \left[ \frac{\partial^6}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_m \partial x_m \partial x_n \partial x_n} \left( \bar{K} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} \right) \right. \\ & + \frac{\partial^4}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_m \partial x_m} \left( \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_n \partial x_n} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} + \bar{K} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_n \partial x_n \partial x_j} \right) \\ & \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left( \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_m \partial x_m} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x_n \partial x_n \partial x_j} \right) \right] \right\} = 0 \quad (34) \end{aligned}$$

### Solución de las ecuaciones de escala grande del agua subterránea

La ecuación de escala grande del agua subterránea (34) involucra derivadas de alto orden, lo que en estricto sentido implicaría contar con condiciones de frontera adicionales, cuya determinación constituye en sí misma un problema abierto y complejo. Es posible evitar requerir estas nuevas condiciones de frontera si se emplea la estrategia de perturbaciones propuesta por Beckie *et al.* (1996b) y Aldama *et al.* (1998).

Para el efecto, se supondrá que las variables de interés presentes en las ecuaciones (33) y (34) escalan del siguiente modo:

$$\bar{K} = \tilde{K} \bar{K}^* \quad (35)$$

$$\bar{H} = \tilde{H} \bar{H}^* \quad (36)$$

$$x_j = \Lambda x_j^* \quad (37)$$

$$\bar{Q}_j = \frac{\tilde{K} \tilde{H}}{\Lambda} \bar{Q}_j^* \quad (38)$$

donde las variables con tilde representan escalas características y las denotadas con asterisco son adimensionales, y se supone que son de  $O(1)$ . Asimismo, se supondrá que el ancho del filtro,  $\lambda$ , satisface la siguiente relación:

$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda}{\Lambda} \ll 1 \quad (39)$$



donde  $\Lambda$  representa la escala de longitud dominante de las variables de eg.

Substituyendo (35)-(38) en (33) y (34) se obtiene:

$$\bar{Q}_j^* = -\bar{K}^* \frac{\partial \bar{H}^*}{\partial x_j^*} - \frac{\epsilon^2}{12} \frac{\partial \bar{K}^*}{\partial x_\ell^*} \frac{\partial^2 \bar{H}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_j^*} - \frac{\epsilon^4}{576} \frac{\partial^2 \bar{K}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_\ell^*} \frac{\partial^3 \bar{H}^*}{\partial x_m^* \partial x_m^* \partial x_j^*} - \frac{\epsilon^4}{144} \frac{\partial^2 \bar{K}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_m^*} \frac{\partial^3 \bar{H}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_m^* \partial x_j^*} + O(\epsilon^6) \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{K}^* \frac{\partial \bar{H}^*}{\partial x_j^*} + \frac{\epsilon^2}{12} \frac{\partial \bar{K}^*}{\partial x_\ell^*} \frac{\partial^2 \bar{H}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_j^*} + \frac{\epsilon^4}{576} \frac{\partial^2 \bar{K}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_\ell^*} \frac{\partial^3 \bar{H}^*}{\partial x_m^* \partial x_m^* \partial x_j^*} + \frac{\epsilon^4}{144} \frac{\partial^2 \bar{K}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_m^*} \frac{\partial^3 \bar{H}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_m^* \partial x_j^*} + \frac{\epsilon^4}{288} \left( \frac{\partial^3 \bar{K}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_\ell^* \partial x_m^*} \frac{\partial^2 \bar{H}^*}{\partial x_m^* \partial x_j^*} + \frac{\partial \bar{K}^*}{\partial x_\ell^*} \frac{\partial^4 \bar{H}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_m^* \partial x_m^* \partial x_j^*} \right) \right\} + O(\epsilon^6) \quad (41)$$

La forma de la ecuación de agua subterránea de eg (41) sugiere expandir la carga adimensional de eg,  $\bar{H}^*$ , en una serie perturbatoria, como sigue:

$$\bar{H}^*(x_\ell^*) = \bar{H}_0^*(x_\ell^*) + \epsilon^2 \bar{H}_1^*(x_\ell^*) + \epsilon^4 \bar{H}_2^*(x_\ell^*) + O(\epsilon^6) \quad (42)$$

donde  $\bar{H}_0^*$ ,  $\bar{H}_0^* + \epsilon^2 \bar{H}_1^*$  y  $\bar{H}_1^* + \epsilon^2 \bar{H}_1^* + \epsilon^4 \bar{H}_2^*$ , respectivamente, representan las soluciones adimensionales aproximadas de orden cero, uno y dos a la ecuación de agua subterránea de eg (41). Evidentemente, la expresión dimensional correspondiente a la serie (42) es  $\bar{H}(x_\ell) = \bar{H}_0(x_\ell) + \epsilon^2 \bar{H}_1(x_\ell) + \epsilon^4 \bar{H}_2(x_\ell) + \dots$ , donde

$$H_n = \bar{H} H_n^*, (n=0, 1, 2, \dots).$$

Substituyendo la ecuación (42) en la ecuación (41) y suponiendo que la igualdad resultante se cumpla como identidad para  $\epsilon^2$  arbitrariamente pequeño, se obtiene la sucesión de ecuaciones presentada a continuación. Para la solución de orden cero:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{K}^* \frac{\partial \bar{H}_0^*}{\partial x_j^*} \right) = 0 \quad (43)$$

Para la corrección de orden uno:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{K}^* \frac{\partial \bar{H}_1^*}{\partial x_j^*} \right) = -\frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial x_\ell^*} \left( \frac{\partial \bar{K}^*}{\partial x_\ell^*} \frac{\partial^2 \bar{H}_0^*}{\partial x_\ell^* \partial x_j^*} \right) \quad (44)$$

Para la corrección de orden dos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{K}^* \frac{\partial \bar{H}_2^*}{\partial x_j^*} \right) = & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{12} \frac{\partial \bar{K}^*}{\partial x_\ell^*} \frac{\partial^2 \bar{H}_1^*}{\partial x_\ell^* \partial x_j^*} \right. \\ & + \frac{1}{576} \frac{\partial^2 \bar{K}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_\ell^*} \frac{\partial^3 \bar{H}_0^*}{\partial x_m^* \partial x_m^* \partial x_j^*} + \frac{1}{144} \frac{\partial^2 \bar{K}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_m^*} \frac{\partial^3 \bar{H}_0^*}{\partial x_\ell^* \partial x_m^* \partial x_j^*} \\ & \left. + \frac{1}{288} \left( \frac{\partial^3 \bar{K}^*}{\partial x_\ell^* \partial x_\ell^* \partial x_m^*} \frac{\partial^2 \bar{H}_0^*}{\partial x_m^* \partial x_j^*} + \frac{\partial \bar{K}^*}{\partial x_\ell^*} \frac{\partial^4 \bar{H}_0^*}{\partial x_\ell^* \partial x_m^* \partial x_m^* \partial x_j^*} \right) \right\} \quad (45) \end{aligned}$$

Las versiones dimensionales de las ecuaciones (43), (44) y (45) son, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{K} \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{K} \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial x_j} \right) = -\frac{\Lambda^2}{12} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 \bar{H}_0}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_j} \right) \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{K} \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial x_j} \right) = & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\Lambda^2}{12} \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 \bar{H}_1}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_j} \right. \\ & + \frac{\Lambda^4}{576} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \frac{\partial^3 \bar{H}_0}{\partial x_m \partial x_m \partial x_j} + \frac{\Lambda^4}{144} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_m} \frac{\partial^3 \bar{H}_0}{\partial x_\ell \partial x_m \partial x_j} \\ & \left. + \frac{\Lambda^4}{288} \left( \frac{\partial^3 \bar{K}}{\partial x_\ell \partial x_\ell \partial x_m} \frac{\partial^2 \bar{H}_0}{\partial x_m \partial x_j} + \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_\ell} \frac{\partial^4 \bar{H}_0}{\partial x_\ell \partial x_m \partial x_m \partial x_j} \right) \right\} \quad (48) \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, las ecuaciones (44) y (45) —o sus contrapartes dimensionales, (47) y (48)— son forzadas por términos no homogéneos que contienen información de orden más bajo. Dichos términos se conocen si las ecuaciones se resuelven en forma secuencial. La ventaja de este procedimiento es que sólo se tiene que resolver la ecuación de flujo estándar, homogénea para la solución de orden cero y no homogénea para las correcciones de orden superior.

En vista de la naturaleza de la serie de perturbaciones de (42), la solución de orden cero  $\bar{H}_0^*$  (o su contraparte dimensional,  $\bar{H}_0$ ) satisface las mismas condiciones de frontera de Dirchlet, Neumann o Robin que  $\bar{H}^*$  (o su contraparte dimensional,  $\bar{H}$ ), y las sucesivas correcciones,  $\bar{H}_1^*$ ,  $\bar{H}_2^*$ ,... (o sus contrapartes dimensionales,  $\bar{H}_1$ ,  $\bar{H}_2$ ,...), versiones homogéneas de la mismas condiciones de frontera.

## Validación

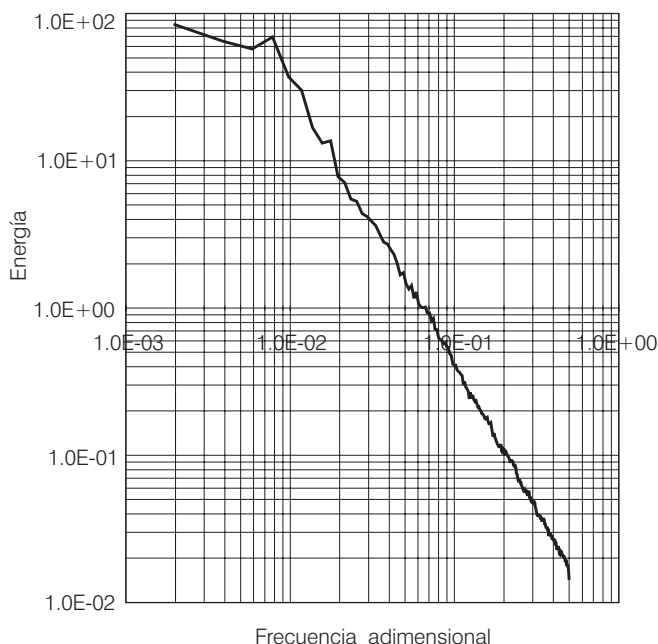
### Prueba a priori

El objetivo de esta prueba es examinar la precisión de las expansiones de  $eg$  mediante variables filtradas exactas que se conocen *a priori*. Se investiga, asimismo, la tasa de convergencia asintótica de las aproximaciones en un pequeño parámetro que caracteriza las escalas significativas del problema. La teoría predice que las expansiones deberían ser asintóticas en potencias pares del parámetro pequeño  $\epsilon$ , definido como la relación del ancho del filtro,  $\lambda$ , respecto de la escala de la longitud dominante de las escalas filtradas,  $\Lambda$ .

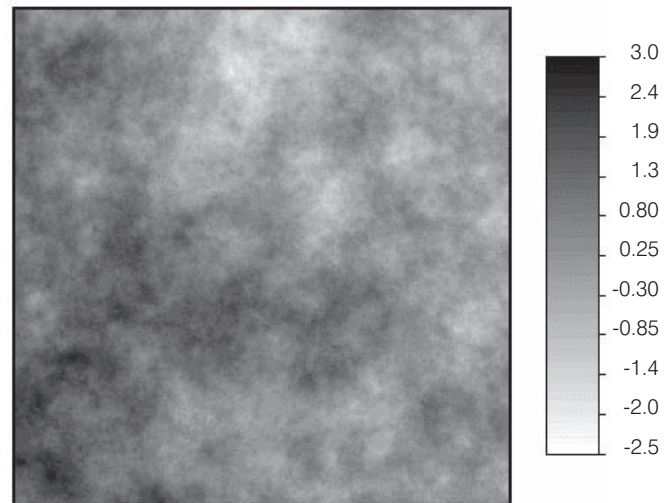
Tanto las pruebas *a priori* como las *a posteriori* (que se describirán posteriormente) se realizaron en un dominio bidimensional  $\Omega = [0, L] \times [0, L]$ ,  $L=512$ , con condiciones de fronteras de carga constante en dos lados opuestos ( $H = 1$  en un lado y  $H = 0$  en el otro lado) y de flujo nulo ( $\partial H / \partial x = 0$ ) en los otros dos lados.

Como primer paso se generó un campo primitivo altamente heterogéneo de conductividades (con varianza del  $\ln K$ ,  $\sigma_{\ln K}^2 = 6.3$ ), especificando el espectro mostrado en la ilustración 3 y empleando un método rápido de transformada de Fourier (Fenton, 1990). En la ilustración 4 se muestra el campo de conductividades resultante que, como se puede apreciar, posee una variabilidad de cinco a seis órdenes de magnitud.

**Ilustración 3. Espectro de energía del campo de conductividades primitivo.**



**Ilustración 4. Campo de conductividades expresado como  $\log_{10} K$ .**



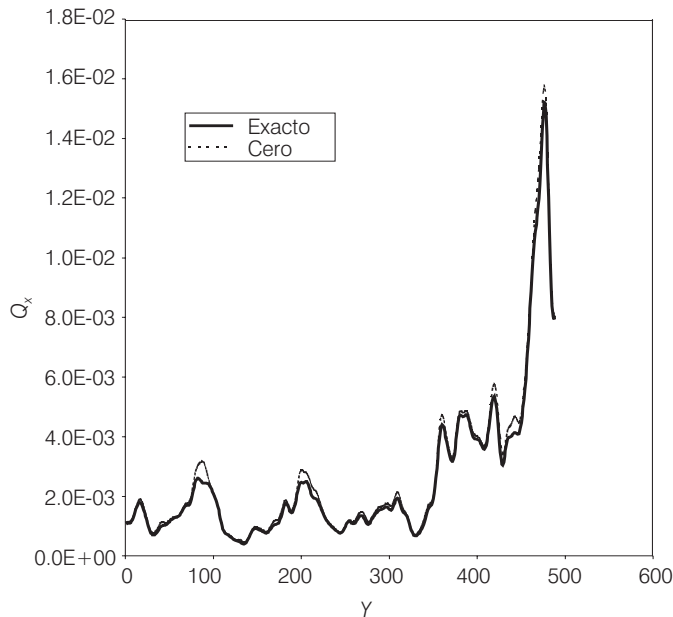
La escala de longitud dominante del campo de conductividad,  $\Lambda$ , se determinó a partir del espectro de energía. Esta escala se estimó como la escala de longitud asociada con el número de onda que corresponde al máximo local más sobresaliente del espectro de energía. En este caso, como se puede observar en la ilustración 3, dicho máximo corresponde a una frecuencia adimensional  $f = \frac{\Delta x}{\Lambda} \approx 0.01$ , donde, como se comenta posteriormente,  $\Delta x = 1$ , por lo que se estimó que  $\Lambda \approx 100$ .

Empleando el campo de conductividades mostrado en la ilustración 4, se resolvió la ecuación primitiva de flujo de agua subterránea (3). Para tal efecto, se empleó el método de volumen finito, con intervalos de discretización  $\Delta x = \Delta y = 1$ . La magnitud apropiada de estos intervalos se determinó por división sucesiva de una magnitud inicial entre dos, hasta que no hubo cambios apreciables en los resultados obtenidos para la variable dependiente  $H$ . De este modo se obtuvo un campo de cargas primitivo y un campo de flujo primitivo. Dichos campos se filtraron numéricamente, empleando un ancho de filtro  $\lambda = 20\Delta x$ , generando así una solución de  $eg$  "exacta".

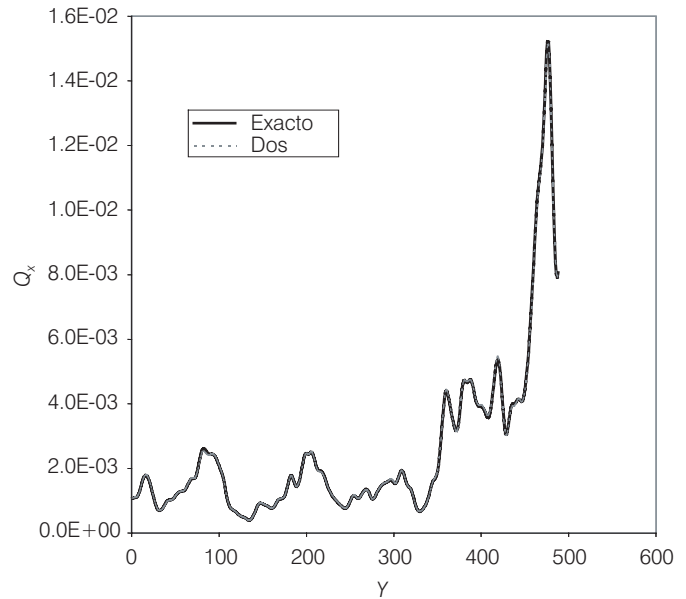
Para filtrar los campos, los datos se transforman primeramente del espacio físico al espacio de Fourier, utilizando un algoritmo de transformada rápida de Fourier. Por el teorema de convolución, la integral de convolución que define la operación de filtrado espacial en el espacio físico se puede calcular en el espacio de Fourier multiplicando la transformada de Fourier de los campos primitivos por la transformada de Fourier del filtro (Bracewell, 1965), y posteriormente invirtiendo el resultado mediante el uso de un algoritmo de transformada rápida de Fourier inversa.



**Ilustración 5. Flujo exacto y flujo aproximado de orden cero  $\bar{Q}_x(L/2, y)$ ,  $\lambda = 20\Delta x$ .**



**Ilustración 6. Flujo exacto y flujo aproximado de orden dos  $\bar{Q}_x(L/2, y)$ ,  $\lambda = 20\Delta x$ .**

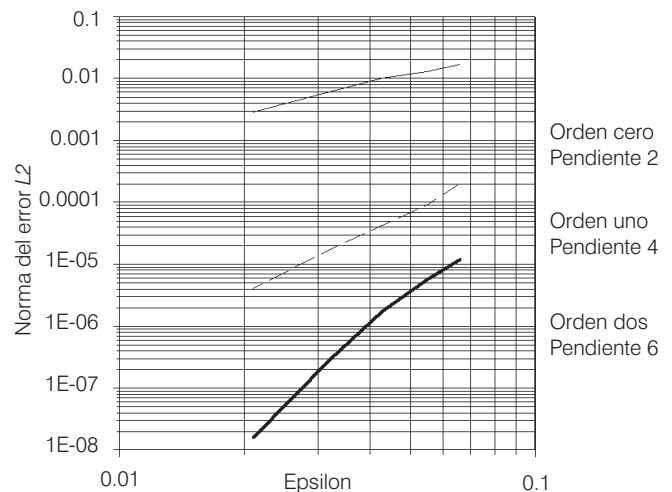


La ecuación (33) se empleó como la base de la prueba *a priori*. Usando los valores exactos del campo de conductividades de  $eg$ ,  $\bar{K}$  y  $\bar{H}$ , se construyeron varias aproximaciones a  $\bar{Q}_x$ ,  $\bar{Q}_y$  usando versiones truncadas de la expresión (33). De esta manera, una aproximación de orden cero se obtuvo despreciando los términos de orden  $O(\lambda^2)$  y más alto; una aproximación de primer orden, despreciando los términos  $O(\lambda^4)$  y más alto, y una aproximación de segundo orden, despreciando los términos de  $O(\lambda^6)$ .

La ilustración 5 muestra la comparación de un corte del valor exacto contra el valor aproximado de orden cero, de  $\bar{Q}_x$  a lo largo de la línea  $x = L/2$ . Como se puede observar, las dos soluciones difieren significativamente en algunas partes del dominio. Por otra parte, la ilustración 6 muestra la comparación de un corte del valor exacto contra el valor aproximado de segundo orden. En este caso, la concordancia entre la solución exacta y la aproximación es excelente.

La norma  $\ell_2$  del error, definida como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias entre la solución aproximada y la exacta, se obtuvo para diferentes valores de  $\epsilon$ . Las tasas de convergencia observadas se muestran en la ilustración 7. Las pendientes de estas líneas corresponden a las tasas de convergencia teóricamente esperadas de las aproximaciones, esto es, los errores son proporcionales a  $\epsilon^2$ ,  $\epsilon^4$ , y  $\epsilon^6$ , para las aproximaciones de orden cero, uno y dos, respectivamente.

**Ilustración 7. Tasa de convergencia calculada de la norma  $\ell_2$  del error, para las aproximaciones de orden cero, uno y dos.**



#### Prueba a posteriori

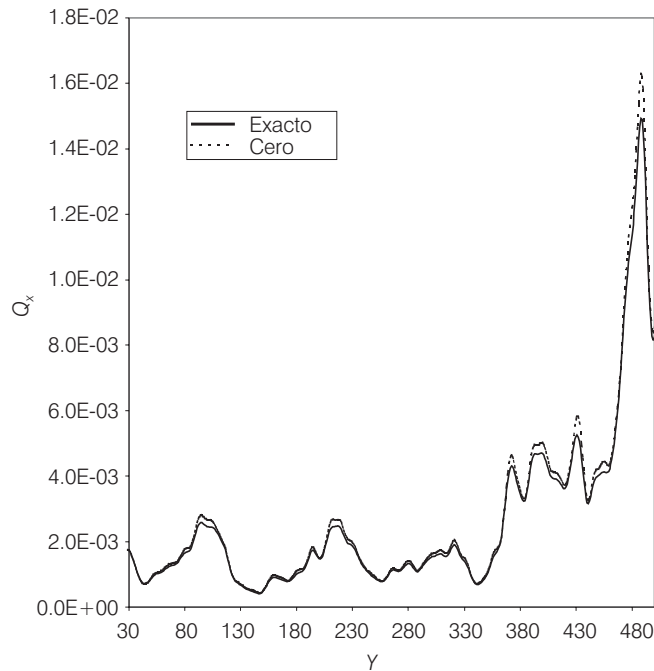
En esta prueba se resuelven las ecuaciones de escala grande empleando directamente el campo de conductividades de escala grande. Al aplicar la teoría propuesta a la práctica, las ecuaciones se utilizarían *a posteriori*.

La ecuación del agua subterránea de  $eg$  (34) se resuelve aplicando el método de perturbaciones descrito ante-

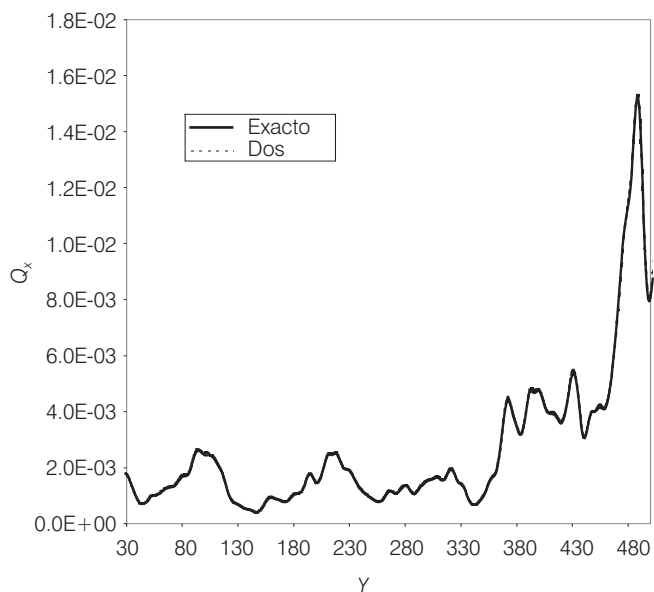
riormente y un método de volumen finito. De esta manera se obtienen las aproximaciones de orden cero, uno y dos.

En la ilustración 8 se muestran el flujo filtrado exacto y el aproximado de orden cero a lo largo de una sección

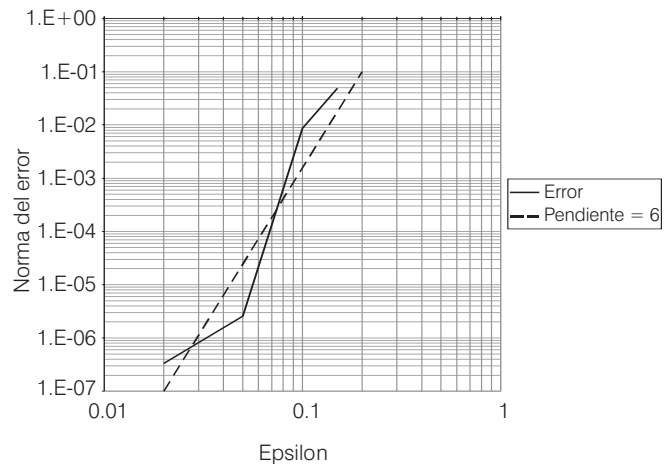
**Ilustración 8. Flujo exacto y flujo aproximado de orden cero  $\bar{Q}_x(L/2, y)$ , con  $\varepsilon = 0.2$ .**



**Ilustración 9. Flujo exacto y flujo aproximado de orden dos  $\bar{Q}_x(L/2, y)$ , con  $\varepsilon = 0.2$ .**



**Ilustración 10. Tasa de convergencia de la norma  $\ell_2$  del error teórica (línea discontinua) y la calculada (línea continua).**



localizada en  $x = L/2$ . Como se puede observar, la aproximación de orden cero se desvía considerablemente de la solución exacta.

En la ilustración 9 se muestran el flujo filtrado exacto y el aproximado de segundo orden a lo largo de una sección localizada en  $x=L/2$ . Los resultados son muy alentadores, ya que la aproximación de orden dos es prácticamente igual a la solución exacta.

La norma  $\ell_2$  del error se obtuvo para diferentes valores de  $\varepsilon$ . De acuerdo con los argumentos teóricos que se presentaron anteriormente, se espera una tasa de convergencia de orden sexto para la solución del orden dos. En la ilustración 10 se muestra la tasa de convergencia observada, que confirma la expectativa teórica.

## Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo se presenta una metodología de modelación que utiliza las componentes de escala grande. Esta metodología difiere de los métodos convencionales en el requerimiento de los datos. Mientras que otras teorías, por lo general requieren información estadística acerca de las propiedades de submalla del sistema, el método propuesto sólo utiliza información de las propiedades de las escalas grandes del sistema, la cual es mucho más fácil de obtener.

La principal aportación de este trabajo es la *solución exacta* del problema de cerradura cuando se estudia la dinámica de las escalas grandes en flujos en medios porosos altamente heterogéneos. La teoría desarrollada se basa en el uso de filtros de Butterworth y la derivación de ecuaciones para la dinámica de las escalas grandes, las cuales se resuelven por medio de un esquema perturbatorio que permite eludir el problema de especificar condi-

ciones de frontera adicionales, ya que las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de las escalas grandes contienen derivadas espaciales de alto orden.

Este trabajo constituye el primer paso en la evaluación de la metodología de escalas grandes para modelar las escalas resueltas del flujo del agua subterránea. Las pruebas numéricas que se realizaron para validar la teoría muestran resultados muy prometedores.

En este trabajo únicamente se utilizaron filtros isotrópicos. Este tipo de filtros es adecuado para la mayoría de los sistemas horizontales bidimensionales. Sin embargo, si se va a modelar una sección vertical, sería más apropiado usar filtros anisotrópicos. En este caso se usa un ancho de filtro pequeño en la dirección vertical, donde las características del medio poroso cambian rápidamente con la posición. En la dirección horizontal se utilizarían anchos de filtro más grandes. Aldama (1993) presenta algunas ideas que se pueden utilizar para realizar este análisis.

Recibido: 24/05/2005

Aprobado: 30/03/2006

## Referencias

- ALDAMA, A. *Filtering techniques for turbulent flow simulation*. Berlín: Springer-Verlag, 1990, 397 pp.
- ALDAMA, A. A subgrid scale theory for physical processes with quadratic nonlinearities: An a priori test for Burgers' flow. *Proc. IX Int. Conf. Comp. Meth. Water Res.* Vol. 2. Southampton: Comp. Mech. Publications, 1992, pp. 91-98.
- ALDAMA, A. Leonard and cross terms approximations in the anisotropically filtered equations of motion, en Galperin, B. y S. Orszag, *Large Eddy Simulation of Complex Engineering on Geophysical Flows*. New York: Cambridge University Press, 1993.
- ALDAMA, A., BECKIE, R. y MEJÍA, M. A new approach for scaling-up flow and transport processes based on the use of Butterworth filters. *Proc. XII Int. Conf. Comp. Meth. Water Res.* Vol. 1. Southampton: Comp. Mech. Publications, 1998, pp. 421-428.
- BECKIE, R., ALDAMA, A. y WOOD, E. Modeling the large-scale dynamics of saturated groundwater flow using spatial-filtering theory: 1. Theoretical development. *Water Resources Res.* Vol. 22, 1996a, pp. 1269-1280.
- BECKIE, R., ALDAMA, A. y WOOD, E. Modeling the large-scale dynamics of saturated groundwater flow using spatial-filtering theory: 2. Numerical evaluation. *Water Resources Res.* Vol. 22, 1996b, pp. 1281-1288.
- BRACEWELL, R. *In the Fourier transform and its applications*. Electrical and electronic engineering series, New York: McGraw-Hill, 1965.
- DAGAN, G. Upscaling of dispersion coefficients in transport through heterogeneous porous media. *Computational Methods in Water Resources*, 1994, pp. 431-434.
- FENTON, G.A. *Simulation and analysis of random fields*. Tesis de doctorado. Princeton, N.J.: Dep. of Civil Eng. and Oper. Res., Universidad de Princeton, 1990.
- GELHAR, L. *Stochastic subsurface hydrology*. New Jersey: Prentice-Hall, 1993.
- STEARNS, S. *Digital signal analysis*. Rochelle Park: Hayden, 1975, 280 pp.

### Abstract

ALDAMA, A.A., MEJÍA, M.A. & BECKIE, R. Scaling-up of groundwater flow equations via Butterworth filtering. Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. XXI, no. 4, October-December, 2006, pp. 5-16.

Water flow and solute transport in porous media evolve over many different length scales. The numerical simulation of the dynamics of all scales would require excessively large computational resources. Whereas it may never be possible to develop models to resolve all significant scales, it may be feasible to develop models of the large scale dynamics. These large scale models would not require the explicit description of the small scales, but should include the effect of the small scales on the large scale dynamics. The incorporation of such effects requires the solution of a problem of closure. Through the use of Butterworth filters, an exact solution of the closure problem for highly heterogeneous groundwater flow is developed. Numerical tests that validate the theoretical results are included.

**Keywords:** flow in porous media, large scales, small scales, problem of closure, Butterworth filters.

### Dirección institucional de los autores:

*Dr. Álvaro A. Aldama*

*Dr. Miguel A. Mejía*

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,  
Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, Jiutepec, Morelos, México,  
C.P. 62550,  
teléfono: +(52) (777) 329 3600,  
director@tlaloc.imta.mx,  
mamejia@tlaloc.imta.mx

*Dr. Roger Beckie*

Department of Earth and Ocean Sciences,  
University of British Columbia,  
6339 Stores Road,  
Vancouver, B.C. V6T 1Z A Canada,  
rbeckie@geology.ubc.ca