

DOI:10.24850/j-tyca-2018-05-03

Artículos

Estimación de parámetros en modelos agregados para el estudio de descargas de acuíferos kársticos Parameters estimation in lumped models to study discharge in karstic aquifers

Yoel Martínez-González¹

Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas, La Habana, Cuba, ymg@instec.cu

Autor para correspondencia: Yoel Martínez-González, ymg@instec.cu

Resumen

En esta contribución se abordan diferentes modelos agregados, descritos en la literatura especializada para el estudio de descargas de acuíferos, incluyendo un modelo de tipo no lineal propuesto por el autor. Con el objetivo de estimar los parámetros involucrados, cada modelo presentado fue acoplado con el algoritmo metaheurístico de búsqueda global Cuckoo Search (CS), el cual genera la aproximación inicial del algoritmo de búsqueda local FMINCON de MatLab. Con base en datos reales medidos en el acuífero Ciego-Morón, los parámetros que caracterizan el agotamiento del acuífero se estimaron de forma satisfactoria, así como el volumen de recarga ocasionada por la precipitación. Los resultados obtenidos se sustentaron por las elevadas correlaciones entre simulaciones y observaciones, demostrando la factibilidad del abordaje expuesto en el presente artículo.

Palabras clave: descargas, acuíferos, estimación de parámetros.

Abstract

In this contribution have been approached different lumped models, described in the specialized literature for the study of aquifer discharges, including a non-linear model proposed by the author. In order to estimate the parameters involved, each model presented has been coupled with the global search metaheuristic algorithm Cuckoo Search (CS), which generates the initial guess for the local search algorithm FMINCON of MatLab. Based on real measured data in the aquifer Ciego-Morón were successfully estimated the parameters that characterize aquifer's decay and recharge volume due to precipitation. The results were supported by the



high correlation between simulations and observations, demonstrating the feasibility of the approach considered here.

Keywords: Discharge, aquifers, parameters estimation.

Recibido: 19/05/2017 Aceptado: 04/04/2018

Introducción

El escurrimiento proveniente de corrientes superficiales y manantiales —en ausencia de precipitaciones— es alimentado por las reservas subterráneas de los acuíferos, las cuales se han acumulado en dichas estructuras geológicas en el transcurso de una recarga determinada (Pérez-Franco, 1995).

Este proceso puede ser simulado a partir de modelos matemáticos (agregados o distribuidos), que establecen relaciones entre la precipitación y el escurrimiento. Este tipo de modelos se ha venido utilizando para evaluar los recursos hídricos renovables de un sistema subterráneo, dependiendo de la complejidad y finalidad de los modelos de gestión adoptados. Uno de los elementos que soporta la elección de los modelos de referencia es la disponibilidad de datos. No siempre se cuenta con datos piezométricos y de explotación que permitan utilizar modelos distribuidos, por lo que en varias ocasiones, a pesar de la variabilidad hidráulica del acuífero en estudio, debe recurrirse razonablemente a modelos agregados, cuales permiten, utilizando parámetros, globalizar pocos comportamiento del acuífero a partir de datos en ríos o manantiales relacionados con las recargas y/o extracciones con cierta precisión.

De acuerdo con Arenillas *et al.* (s.f.), estos modelos agregados de precipitación-escurrimiento (MPE) forman parte de un grupo específico de herramientas computacionales para la simulación hidrológica, cuyo principal objetivo es la generación (o reconstrucción) de series temporales de escurrimiento, partiendo de una serie de datos de precipitaciones y extracciones por bombeo, así como temperatura existente en la zona de estudio.

En dichos modelos intervienen parámetros físicos que son característicos del sistema que se pretende simular y, en sentido general, son desconocidos, resultando de suma importancia abordar la formulación de un problema inverso que conduzca a una estimación óptima de los mismos,



pues intervienen en la evaluación de los recursos hídricos del sistema en cuestión.

La solución de un problema inverso puede ser hecha a través de algoritmos de optimización, con el propósito de minimizar (o maximizar) cierta función objetivo. Básicamente existen dos clases de métodos de optimización: determinísticos y estocásticos. Los primeros dependen del gradiente de la función objetivo, haciendo uso de las particularidades del funcional; en métodos estocásticos trabaian con la configuraciones técnicas aleatorias; por ejemplo, computacionales inspiradas en la naturaleza, con el objetivo de barrer (estocásticamente) y el espacio de búsqueda completo, al procurar el óptimo global (Silva-Neto & Becceneri, 2009).

En el presente artículo se abordarán diferentes modelos agregados para el estudio de descargas de acuíferos. Para establecer una comparación entre ellos, el autor inicialmente unificará el enfogue teórico que permitirá obtener las respectivas expresiones que estimarán los volúmenes de descarga en acuíferos kársticos. En la sección 2, al inicio de este estudio, será descrito el modelo conceptual MEDA, propuesto por Iglesias (1984), el cual aplica la fórmula propuesta por Maillet (citado por Pérez Franco, 1995) para el estudio del agotamiento del escurrimiento proveniente de un acuífero. Otras formulaciones, como las desarrolladas por Tisson et al., así como Forkasiewicz y Paloc (citados por Pérez-Franco, 1995), también serán objeto de análisis, con el propósito de formular modelos que permitan estimar las descargas en cuestión. En la sección 3, el autor presentará y desarrollará un modelo no lineal. La sección 4 describe el problema inverso donde es formulada la función objetivo y los algoritmos de búsqueda global utilizados, mientras que en la sección 5 se describe el caso de estudio. Posteriormente se muestran los resultados obtenidos y su discusión. Por último se tienen las conclusiones derivadas de los objetivos perseguidos en esta contribución.

Modelos agregados para cuantificar caudales de descarga de acuíferos

El caudal de determinada fuente, o la descarga de un acuífero en sentido general, no se correlaciona con la precipitación con carácter mensual. Es decir, las descargas dependen del volumen almacenado en el acuífero y éste guarda correlación con las precipitaciones precedentes en varios meses e incluso en años anteriores. En cambio, si se consideran la precipitación de cierto periodo y el volumen de descarga acontecido a lo largo del tiempo como consecuencia de esa precipitación es posible establecer una clara interrelación. El método para determinar el volumen



de descarga consecuente a una precipitación dada ha sido abordado en detalle por Castillo (1981), citado por Arenillas *et al.* (s.f.). Con base en series de precipitación (P) y volúmenes observados (V), se han obtenido ecuaciones de ajuste de tipo lineal y potencial, con coeficientes de correlación (r) del orden de 0.9 en la forma:

Ecuación lineal:

$$V = m P + n \tag{1a}$$

Ecuación potencial:

$$V = m P^n \tag{1b}$$

siendo m y n = parámetros de ajuste. En función del tipo de ecuación adoptada, los parámetros m y n presentan dimensiones. Esta observación es pertinente, pues en Arenillas et al. (s.f.), ambos parámetros son literalmente presentados como adimensionales, lo cual constituye, sin duda, un error en dicha publicación. En efecto, para el enfoque lineal $(m) = L^2$ y $(n) = L^3$, mientras que para el potencial $(m) = L^3$ y $(n) = L^3$ y (n) y

Formulación de Iglesias

Tal y como fue enunciado con anterioridad, Iglesias (1984) introduce el modelo propuesto por Maillet (citado por Pérez Franco, 1995) para la curva de agotamiento de la descarga de un acuífero, el cual se expresa como:

$$Q_t = Q_o e^{-\alpha t} \tag{2}$$

siendo Q_t = descarga del acuífero en el instante de tiempo t; Q_o = descarga al inicio del periodo analizado; α = coeficiente de agotamiento, característico del acuífero. Acorde con Pérez-Franco (1995), este parámetro $\alpha = 1/\tau$, siendo τ el tiempo necesario para que $Q_t = Q_o/e \approx 0.3678 Q_o$.

Tal y como se muestra en la Figura 1, en el i-ésimo mes (mes i), el caudal de descarga se denota por Q_i . En caso de no existir recarga como consecuencia de precipitaciones, entonces el caudal del mes i+1 será



denotado como Q_{i+1}^* . Si se reporta la existencia de una precipitación P_i , el caudal de descarga sería obviamente superior y se identificará como Q_{i+1} .

```
Función objetivo: f(x), x = (x_1, x_2, ..., x_d); Generar una población inicial de n nidos; While (t<MaxGeneration) or (criterio de parada)

Obtener un cuco aleatoriamente (por ejemplo, i) y se reemplaza esta solución introduciendo los vuelos de Lévy;

Evaluar su calidad/ajuste F_i

Escoger un nido entre n (por ejemplo, j) aleatoriamente; if (F_i > F_j)

Reemplazar j por la nueva solución; end if

Una fracción (p_a) de los peores nidos es abandonada y se construyen nuevos;

Mantener las mejores soluciones/nidos;

Clasificar las soluciones/nidos y encontrar las mejores;

Pasar las mejores soluciones a la próxima generación. end while
```

Figura 1. Pseudocódigo del algoritmo CS. Adaptado de Yang y Deb (2009).

La precipitación de referencia P_i , acorde con Iglesias (1984), habrá de incrementar el volumen almacenado en el acuífero en una cantidad equivalente al área comprendida entre las curvas de agotamiento representadas en la Figura 2 (Arenillas *et al.*, s.f.).

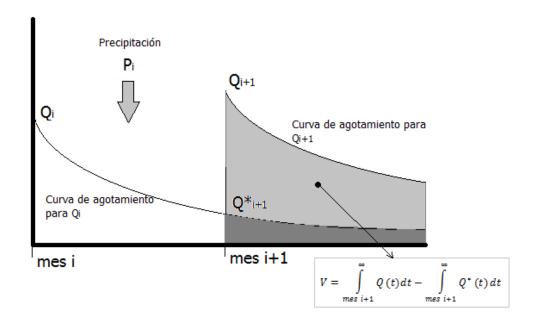




Figura 2. Curvas de agotamiento en ausencia y presencia de precipitación.

En efecto, aplicando la ecuación (2), el área bajo las curvas de agotamiento identificada como el volumen de descarga V puede ser expresada por la diferencia de las siguientes integrales:

$$V = V_2 - V_1 = \int_0^\infty Q_{i+1} e^{-\alpha t} dt - \int_0^\infty Q_{i+1}^* e^{-\alpha t} dt = \frac{Q_{i+1}}{\alpha} - \frac{Q_{i+1}^*}{\alpha} = \frac{Q_{i+1}}{\alpha} - \frac{Q_i e^{-\alpha \Delta t_i}}{\alpha}$$
 (3)

siendo Δt_i = intervalo entre el mes i + 1 y mes i. Como se pretende determinar Q_{i+1} , cualesquiera de las expresiones (1) puede ser utilizada. Arenillas et al. (s.f.) recomiendan el empleo de la ecuación (1b) correspondiente a la estructura potencial de forma generalizada, ya que la ecuación (1a) tiene un rango de validez restringido, y puede llegar a dar resultados anómalos e incluso negativos. Para evitar dicho inconveniente y dar continuidad al desarrollo teórico aquí presentado, el autor será consecuente con dicha recomendación, sin ser excluyente con el posible empleo de la ecuación (1a).

Sustituyendo la ecuación (1b) en (3) y despejando Q_{i+1} es posible obtener la siguiente expresión:

$$Q_{i+1} = (m P_i^n) \propto +Q_i e^{-\alpha \Delta t_i} \tag{4}$$

La ecuación (4) es la base conceptual del Modelo para el Estudio de Descargas de Acuíferos (MEDA) del Instituto Tecnológico GeoMinero de España, y con el mismo es posible realizar las estimaciones pertinentes de los caudales de descarga de cada mes, sobre la base del conocimiento de precipitación, y caudales del mes precedente y los parámetros m, n y α . Posteriores análisis del modelo han aportado mejoras notables en su formulación conceptual. Entre éstas se puede mencionar la introducción del concepto de precipitación útil (P_u), definida según Arenillas et al. (s.f.), como la diferencia entre la precipitación (P) y la evapotranspiración real (E_{tr}), la cual forma parte de la recarga en el acuífero y está estrechamente relacionada con la temperatura sobre la superficie del suelo (T) y situación geográfica, entre otros parámetros del clima. Arenillas et al. (s.f.), al analizar valores de evapotranspiración potencial y real en España, presentan la siguiente ecuación de cálculo de la precipitación útil para el i-ésimo mes:

$$P_{u_i} = P_i - T_i^b \tag{5}$$

donde el parámetro b = exponente, que puede variar entre 1.3 y 1.6. Expresiones similares a la anterior pueden ser obtenidas para condiciones



locales, características de regiones y climas concretos. No obstante, de acuerdo con Arenillas *et al.* (s.f.), la propuesta abordada no resta generalidad al modelo MEDA y, por lo tanto, la ecuación (4) podrá ser rescrita como:

$$Q_{i+1} = (m P_{u_i}^n) \propto + Q_i e^{-\alpha \Delta t_i} \tag{6}$$

De igual forma, es posible incluir el volumen de los bombeos extraídos mensualmente en el acuífero (W). Esta inclusión, tal y como reportan Arenillas et al. (s.f.), presenta la limitación, en ocasiones insalvable, de que éstos no produzcan afectaciones de carácter dinámico al punto de descarga. Por tanto, de ser considerado el volumen bombeado en el i-ésimo mes (W_i), la ecuación (6) podrá ser replanteada como:

$$Q_{i+1} = \left(m \, P_{u_i}^n - W_i \right) \propto + Q_i e^{-\alpha \Delta t_i} \tag{7}$$

La ecuación (7), para las consideraciones establecidas hasta su conceptualización, representa la expresión más general y utilizable del modelo MEDA (de tipo MPE), la cual, en ausencia de datos de temperatura y/o bombeos mensuales, presenta como casos particulares las ecuaciones (4) y (6), respectivamente.

Formulación de Tisson, Werner y Dunsquit

Pérez-Franco (1995) ha desarrollado la siguiente expresión para el agotamiento de la descarga de un acuífero:

$$Q_t = \frac{Q_o}{(1+\alpha t)^2} \tag{8}$$

De forma análoga a la propuesta de Maillet, empleada por Iglesias (1984) en el desarrollo de MEDA, el parámetro α se identifica como el coeficiente de agotamiento del acuífero. Como ya es conocido $\alpha=1/\tau$; no obstante esta vez τ es el tiempo necesario para que $Q_t=Q_o/4$. Este razonamiento sugiere que para el mismo valor de α , las expresiones (2) y (8) arriban a caudales de descarga diferentes, siendo mayores aquellos calculados a través de la ecuación (2). Para obtener el volumen de descarga V, con el empleo de la ecuación (8) se procede de forma análoga al cálculo de las siguientes integrales:



$$V = \int_0^\infty \frac{Q_{i+1}}{(1+\alpha t)^2} dt - \int_0^\infty \frac{Q_{i+1}^*}{(1+\alpha t)^2} dt = \frac{Q_{i+1}}{\alpha} - \frac{Q_{i+1}^*}{\alpha} = \frac{Q_{i+1}}{\alpha} - \frac{Q_i}{\alpha (1+\alpha \Delta t_i)^2}$$
(9)

Tomando en cuenta las mejoras introducidas por Iglesias (1984) (citado por Arenillas *et al.*, s.f.) en la cuantificación de *V*, es posible obtener un modelo para la estimación de las descargas de un acuífero (ver ecuación (10)), donde es de destacar la alteración que sufre el segundo término de la ecuación (7), que caracteriza el agotamiento del acuífero a partir del *i*-ésimo mes, como consecuencia de introducir la formulación (8):

$$Q_{i+1} = \left(m \, P_{u_i}^n - W_i \right) \propto + \frac{Q_i}{(1 + \alpha \, \Delta \, t_i)^2} \tag{10}$$

Formulación de Forkasiewicz y Paloc

Esta fórmula fue propuesta sobre la base de observaciones en una fuente kárstica y presenta la siguiente estructura (Pérez-Franco, 1995):

$$Q_t = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q_0^2} + \beta t}} = \frac{Q_o}{\sqrt{1 + \beta Q_0^2 t}} \tag{11}$$

donde β = coeficiente de decrecimiento del caudal de descarga. Las unidades de este parámetro son $L^{-6} \cdot T$. Su interpretación puede llevarse a cabo igualando la ecuación (11); por ejemplo, con la ecuación (2). Al establecer las transformaciones pertinentes es posible encontrar la siguiente relación:

$$\beta = \frac{e^{2\alpha t} - 1}{Q_0^2 t} \tag{12}$$

La ecuación anterior no sólo sugiere que β depende de la capacidad de agotamiento del acuífero, expresada a través de α , sino también del caudal de descarga Q_o y además del tiempo. Puede obtenerse un resultado similar al emplear las ecuaciones (11) y (8). Sin embargo, su desarrollo no reportaría ningún elemento cualitativo adicional al obtenido por la vía aquí expuesta. Precisamente, en esta multidependencia radica la complejidad de la formulación analizada. Aunque en Pérez-Franco (1995) no se presentan elementos adicionales que permitan esclarecer aún más la naturaleza de dicho parámetro, es de suponer que sería útil para reconstruir series



históricas de descargas de acuíferos kársticos en determinado periodo, y por tal motivo ha sido introducida en el presente artículo. El volumen de descarga V en este caso podrá expresarse como:

$$V = \int_0^\infty \frac{Q_{i+1}}{\sqrt{1 + \beta Q_{i+1}^2 t}} dt - \int_0^\infty \frac{Q_{i+1}^*}{\sqrt{1 + \beta (Q_{i+1}^*)^2 t}} dt = \frac{2}{\beta} \left(\frac{1}{Q_{i+1}^*} - \frac{1}{Q_{i+1}} \right)$$
 (13)

El modelo que resulta para la estimación de descargas de un acuífero a partir de la ecuación (11) presenta una estructura diferente a las presentadas en las ecuaciones (7) y (10). Este modelo (ver ecuación (14)) aporta además la presencia de un nuevo parámetro (β), que caracteriza el decrecimiento de la descarga de una fuente existente en un acuífero, que como ya se ha explicado, es de naturaleza compleja y su determinación debe ser rigurosa para no incurrir en errores no deseados que afecten la calidad de las estimaciones efectuadas en la descarga.

$$Q_{i+1} = \frac{Q_i}{\sqrt{1 + \beta Q_i^2 \Delta t_i - (m P_{u_i}^n - W_i) \frac{\beta}{2} Q_i}}$$
 (14)

Propuesta de modelo no lineal para determinar la descarga para un acuífero

Tal y como se ha podido apreciar en las secciones anteriores, existen varios modelos para describir la dinámica del agotamiento de la descarga de un acuífero. Uno de los más usados es el propuesto por Maillet (citado por Pérez-Franco, 1995). Desde el punto de vista de su estructura (ver ecuación (2)), dicho modelo es solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dQ}{dt} = -\infty Q \tag{15}$$

sujeta a la siguiente condición inicial $Q(0) = Q_o$. Independiente de los niveles de precisión que puede brindar este tipo de formulación, una pequeña modificación en la ecuación (15) puede ser introducida, considerando que la variación de la descarga en el acuífero es una función no lineal. Ésta puede ser escrita como:

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa \ Q^{\eta} \tag{16}$$



siendo η = exponente y κ = parámetro que caracteriza el agotamiento del acuífero, y cuyas unidades son $L^{3(1-\eta)}$ $T^{\eta-2}$. La integración de la ecuación (16) conduce a la siguiente solución analítica:

$$Q_{t} = \left[Q_{o}^{(1-\eta)} - \kappa (1-\eta) \ t \right]^{\frac{1}{(1-\eta)}}$$
 (17)

Como ya es usual, el volumen de descarga V podrá ser determinado según:

$$V = \int_0^\infty \frac{dt}{\left[Q_{i+1}^{(1-\eta)} - \kappa(1-\eta) t\right]^{\frac{1}{(1-\eta)}}} - \int_0^\infty \frac{dt}{\left[\left(Q_{i+1}^*\right)^{(1-\eta)} - \kappa(1-\eta) t\right]^{\frac{1}{(1-\eta)}}}$$
(18)

Para la actual formulación, resulta de interés para el autor expresar las integrales de la ecuación (18) empleando procedimientos apropiados para el cálculo de límites, dado que se está en presencia de integrales impropias, por lo tanto:

$$V = \lim_{t \to \infty} \frac{\left[Q_{i+1}^{(1-\eta)} - \kappa(1-\eta) t\right]^{\left(\frac{2-\eta}{1-\eta}\right)}}{\kappa(\eta-2)} - \frac{Q_{i+1}^{2-\eta}}{\kappa(\eta-2)} - \lim_{t \to \infty} \frac{\left[(Q_{i+1}^*)^{(1-\eta)} - \kappa(1-\eta) t\right]^{\left(\frac{2-\eta}{1-\eta}\right)}}{\kappa(\eta-2)} - \frac{(Q_{i+1}^*)^{(2-\eta)}}{\kappa(\eta-2)}$$

$$=\frac{Q_{i+1}^{2-\eta}}{\kappa(2-\eta)} - \frac{\left(Q_{i+1}^*\right)^{(2-\eta)}}{\kappa(2-\eta)} \tag{19}$$

En la ecuación (19), para $0 < \eta < 1$, los límites del primer y tercer términos convergen a cero y el volumen de descarga resulta de la diferencia entre el segundo y cuarto término en dicha ecuación. Esta particularidad es aprovechada para establecer la formulación del modelo propuesto en esta sección, de forma análoga, a como se procedió para obtener las ecuaciones (7), (10) y (14). En efecto, el modelo no lineal para establecer las descargas de acuíferos, válido para $0 < \eta < 1$, se expresa por la ecuación (20) siguiente:

$$Q_{i+1} = \left\{ \left(m \, P_{u_i}^n - W_i \right) \kappa \, (2 - \eta) + \left[Q_i^{(1-\eta)} - \kappa (1 - \eta) \, \Delta \, t_i \right]^{\frac{2-\eta}{(2-\eta)}} \right\}^{\frac{1}{(2-\eta)}}$$
 (20)

Formulación del problema inverso



Acorde con Silva-Neto y Moura-Neto (2005), así como con Silva-Neto y Becceneri (2009), los problemas inversos pueden ser clasificados tomando en cuenta la dimensión del espacio donde el modelo es definido, así como la dimensión del espacio donde los objetos que son estimados pertenecen. Esta clasificación se resume en la Tabla 1 y es útil para brindar una idea *a priori* de la dificultad del problema en consideración.

Modelo matemático	Estimación							
	Dimensión finita (constantes)	Dimensión infinita (función)						
Dimensión finita *	Tipo I	-						
Dimensión infinita **	Tipo II	Tipo III						

Tabla 1. Clasificación de problemas inversos.

En los modelos dados por las ecuaciones (7), (10), (14) y (20) es posible estimar de modo simultáneo los parámetros que son desconocidos. Como la cantidad de mediciones debe ser superior (o al menos igual) a la cantidad de incógnitas a ser estimadas (parámetros), su identificación se basa en la resolución del problema inverso, tratado como la minimización de cierta función objetivo en un espacio de búsqueda de dimensión finita.

Función objetivo

La función objetivo usada en este estudio es multicriterio, y ha sido adaptada de Barco, Wong y Stenstrom (2008):

$$F(\boldsymbol{\theta}) = w_1 \left(\frac{V_o - V(\boldsymbol{\theta})}{V_o}\right)^2 + w_2 \left(\frac{Q_o^{max} - Q(\boldsymbol{\theta})^{max}}{Q_o^{max}}\right)^2 + w_3 \sum_{i=1}^p \left(\frac{Q_o - Q(\boldsymbol{\theta})}{Q_o}\right)_i^2$$
(21)

sujeta $\theta_l \leq \theta \leq \theta_u$, siendo θ = vector de los parámetros; θ_l y θ_u son los vectores de los respectivos límites inferior y superior de los parámetros; V = volumen total de flujo descargado por el acuífero; $Q^{m\acute{a}x}$ = caudal máximo de descarga mensual; Q = descarga mensual; el subíndice 'o' denota el i-ésimo valor de la serie de caudales observados, mientras que el subíndice 'i

^{*}por ejemplo: sistema de ecuaciones algebraicas; **por ejemplo: sistema de ecuaciones diferenciales.



'denota la i-ésima simulación del caudal de descarga. Los parámetros w_1 , w_2 y w_3 representan factores de ponderación (o peso) de cada uno de los términos de la función objetivo. La división con respecto a los valores observados normaliza dicha función y en la presente contribución será asignada igual importancia a cada uno de los términos de la ecuación (21) considerando $w_1 = w_2 = w_3 = 1.0$. La cantidad de parámetros escogidos para la calibración depende de la estructura de los modelos se presentan en las secciones anteriores. De forma general, en la Tabla 2 se presentan los posibles parámetros a identificar.

Tabla 2. Parámetros de los modelos.

Modelo	Vector de parámetros
Ecuación (7)	$\theta = (m, n, b, \alpha)^{T}$
Ecuación (10)	$U = (III, II, D, \alpha)$
Ecuación (14)	$\theta = (m, n, b, \beta)^{T}$
Ecuación (20)	$\theta = (m, n, b, \kappa, \eta)^{T}$

En esta investigación se empleó el algoritmo de búsqueda global Cuckoo (Cuckoo search, CS), desarrollado por Yang y Deb (Yang & Deb, 2009; Yang & Deb, 2010). Tal y como reportan Civicioglu y Besdok (2011), la introducción de este algoritmo puede proveer resultados más robustos que algoritmos ampliamente utilizados, como el algoritmo de optimización por enjambre de partículas (Particle Swarm Optimization, PSO) desarrollado por Clerc y Kennedy (2002), así como el basado en una colonia artificial de abejas (Artificial Bee Colony Algorithm, ABC) desarrollado por Karaboga y Basturk (2007a, 2007b). Además, se ha optado por emplear un enfoque híbrido, acoplando CS con algún método determinístico basado en el gradiente. En este caso, será introducida la herramienta FMINCON del asistente matemático MatLab, la cual consta de varios algoritmos y permite, como bien es conocido por los utilizadores de este asistente, encontrar el mínimo de una función no lineal, multidependiente sujeta a restricciones. En esta contribución será empleado el algoritmo punto interior (interior-point), el cual le incorpora rapidez y precisión al problema inverso abordado, al tratarse de minimizar la función objetivo (ecuación (21)), sujeta a restricciones de los parámetros.

El algoritmo CS



El algoritmo CS fue desarrollado por Yang y Deb (Yang & Deb, 2009; Yang & Deb, 2010) basado en la aplicación metaheurística proveniente de la naturaleza e inspirado en el comportamiento de pájaros fascinantes, no sólo por los sonidos que pueden hacer sino por su agresiva estrategia de reproducción. Acorde con dichos investigadores, algunas especies de aves, como *Ani* y *Guira cuckoos*, colocan sus huevos en nidos comunes, donde ellos pueden llegar a remover los huevos de otras especies de pájaros para incrementar la probabilidad de producir sus propios huevos.

Un número considerable de especies de *cuckoos* (o cucos) presentan un comportamiento parásito al momento de anidar, colocando sus huevos en el nido de otras especies para que éstas se encarguen de cuidar y alimentar a sus polluelos. Pueden llegar a establecerse conflictos directos con los cucos intrusos y si una especie descubre que los huevos en su nido no son propios, simplemente aparta estos huevos o abandona ese nido, y construye otro en un lugar diferente. Acorde con Yang y Deb (2009), algunas especies de cucos, como el *New World brood-parasitic Tapera* han evolucionado de tal manera que las hembras han podido asemejar en color y patrones de los huevos de un número selecto de especies de pájaros. Esto reduce la probabilidad de que sus propios huevos sean abandonados e incrementa su descendencia. El algoritmo CS emplea las siguientes representaciones:

- Cada huevo en un nido representa una solución y el huevo de cuco representa una solución nueva. El propósito es usar las nuevas y mejores soluciones (cucos) para reemplazar aquellas que no son tan buenas en los nidos.
- En la forma más simple, cada nido tiene un huevo; sin embargo, el algoritmo puede ser extendido a casos más complicados, en los que cada nido tiene múltiples huevos, representando un conjunto de soluciones.

El algoritmo CS está basado en tres reglas idealizadas:

- 1. Cada cuco coloca un huevo a la vez y lo hace en un nido escogido de forma aleatoria.
- 2. Los mejores nidos, con alta calidad de huevos, serán transferidos a la próxima generación.
- 3. El número de enjambres de nidos es predeterminado (N_d) y el huevo colocado por el cuco es descubierto por las especies de pájaros con una probabilidad $p_a = \in (0, 1)$.

Además, Yang y Deb (2009) descubrieron que el estilo de búsqueda del camino aleatorio es mejor ejecutado por los vuelos Lévy. El pseudocódigo puede ser resumido como se ilustra en la Figura 2.

La importante ventaja de este algoritmo es su simplicidad, así como también su facilidad para ser implementado computacionalmente. Es válido resaltar que el algoritmo propuesto por Yang y Deb (2009) ha sido modificado por diferentes investigadores en este campo. El autor del



presente artículo ha utilizado el código de CS programado en MatLab por Yang, en la Universidad de Cambridge, entre noviembre de 2008 y junio de 2009, con base en la propuesta original del algoritmo. Como ya se mencionó, se ha acoplado a la función FMINCON de MatLab, de manera que, en adelante, para hacer referencia a la estrategia adoptada esta combinación será denominada CS-FMIN. En la Figura 3 se muestra el diagrama de flujo para la estimación de parámetros en modelos de descarga de acuíferos. Para la aplicación de CS-FMIN, inicialmente será utilizada una versión débil de CS, con el objetivo de generar una aproximación inicial para el algoritmo IP. Tal y como muestra la Figura 4, en primer lugar, se establece un procedimiento iterativo para estimar los parámetros del modelo de descarga analizado, pero con el objetivo de mejorar los resultados es que se introduce la estimación definitiva a través de FMINCON.

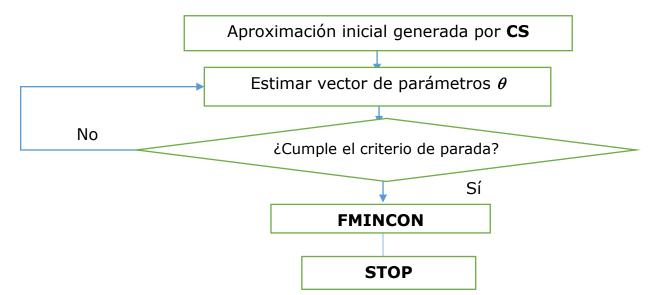


Figura 3. Diagrama de flujo para la estimación de los parámetros en modelos de descargas de acuíferos.



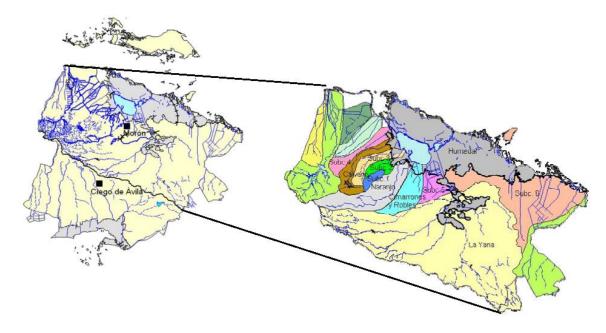


Figura 4. Ubicación geográfica y cuenca superficial asociada al área del acuífero Ciego-Morón. Adaptado de Vidal-Olivera y González-Abreu (2013).

Materiales y métodos

Estudio de caso

A continuación se expone el análisis de las descargas del acuífero Ciego-Morón, tomando como referencia principal el estudio de Martínez-Rodríguez, Hernández-Valdés, Llanusa-Ruiz y Dilla-Salvador (1986), durante el periodo comprendido entre noviembre de 1983 a diciembre de 1985 (un total de 24 meses). Dichos autores dirigieron su investigación hacia el conocimiento del comportamiento hidráulico del mencionado acuífero, el cual juega un papel fundamental en el desarrollo socioeconómico de la provincia Ciego de Ávila, Cuba. El acuífero Ciego-Morón se establece en las calizas y dolomías del Mioceno, con espesores variables, que pueden alcanzar 300 m, con alta presencia de karst, abarcando más de 80% del territorio analizado (Martínez-Rodríguez et al., 1986).

Entre los paquetes de programas para realizar el estudio del comportamiento de este acuífero se reporta el modelo MEDA (Iglesias, 1984; Arenillas et al., s.f.), con el objetivo de completar la serie histórica de descarga del acuífero en el periodo de calibración seleccionado (de noviembre de 1983 a diciembre de 1985). Al no darse detalles del proceso



de calibración por parte de Martínez-Rodríguez et al. (1986) es de suponer que ésta fue realizada de forma manual (mediante ensayo y error), pues no existe evidencia que indique si la versión utilizada por estos autores es aquella que hace uso del algoritmo de Levenberg-Marquardt para la calibración automática de sus parámetros, implementada por Erloza (1985), citado por Arenillas et al. (s.f.).

Definición del área a modelar y datos para la estimación de la descarga

En el área en estudio (ver Figura 4), la descarga del acuífero Ciego-Morón se produce hacia el norte. Los caudales medidos se reportan en la estación de aforo de la cuenca superficial La Yana (área de 1 503 km²) en el periodo comprendido en la sección de referencia (Figura 5b).



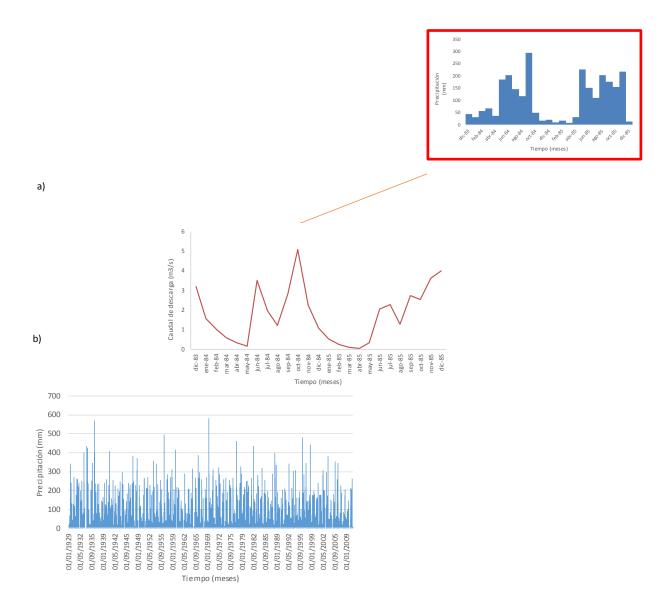


Figura 5. a) Registro de precipitaciones pluviómetro 124. Precipitaciones entre diciembre de 1983 y diciembre de 1985, intervalo estudiado por Martínez Rodríguez *et al.* (1986); b) descargas en la estación de aforo de La Yana, de diciembre de 1983 a diciembre de 1985.

Se seleccionó el periodo de precipitaciones entre enero de 1929 a diciembre de 2010 (Figura 5a), a partir de los datos de un pluviómetro



ubicado en la zona central del acuífero e identificado como P-124, coincidiendo con el utilizado por Martínez-Rodríguez et al. (1986), pero para una serie histórica entre enero de 1967 y diciembre de 1986. De acuerdo con dicho autor, su selección se justificó al resultar imposible hallar la isoyeta media mensual, la cual hubiera sido de mucha utilidad para establecer la correlación entre la precipitación mensual y los caudales de descarga observados en la estación de aforo La Yana.

Es válido destacar que en dicho estudio se introdujo el volumen de descarga de acuerdo con una relación del tipo ecuación (1a); además, no se reportaron datos de bombeo y la precipitación útil se toma como el acumulado mensual, es decir, sin considerar la evapotranspiración real, estableciendo de esta manera los datos de entrada en los modelos abordados en esta investigación.

Experimento numérico

Un experimento numérico fue conducido con cada uno de los modelos en estudio, donde la dimensión del problema quedó previamente establecida a partir del número de parámetros, al ser estimados en cada uno de ellos y sus posibles variantes. En el algoritmo CS-FMIN, la tolerancia se estableció por etapas. Para determinarla se condujeron varios experimentos previos, tomando en cuenta que se está empleando una versión débil de CS para generar la aproximación inicial a utilizar en FMIN. La tolerancia en CS está definida como el mínimo valor que puede obtener la función objetivo en estudio, dada en este caso por la ecuación (21), tal y como se muestra en la Tabla 3.

Iania	~ F	-vnari	manta	niimarica
Iavia	J . I	- ^ 1.7 C 1.1		numérico.
		-, , p =		

Modelo	Tolerancia CS	N _d	p _a		
Ecuación (7)					
Ecuación (10)	3.2*	5	0.075		
Ecuación (14)	16*	5	0.075		
Ecuación (14)	5.5**	5 0.0 25 0.2 5 0.0	0.25		
Ecuación (20)	3.2*	5	0.075		
Leddeloii (20)	5.5**	25	0.25		

^(*) Considerando parámetros constantes.

^(**) Considerando variabilidad temporal del parámetro de agotamiento (p. ej., ecuación (14): β y ecuación (20): κ .



En las ejecuciones preliminares de CS-FMIN se detectó que cuando se emplea el modelo basado en la curva de agotamiento propuesta por Forkasiewicz y Paloc, según la ecuación (14) y considerando el parámetro β como constante, la tolerancia de CS debe ser elevada para arribar a una aproximación inicial que permita la ejecución de FMIN. Esto no sucede en el caso del modelo de descarga no lineal propuesto por el autor, según la ecuación (20), donde la tolerancia se mantuvo en los mismos valores de los modelos dados por las ecuaciones (7) y (10), lo cual es favorable para esta formulación.

Cuando los parámetros β y κ son considerados variables, tomando en cuenta que la dimensión del problema de estudio crece al incrementarse el número de parámetros a identificar, el autor prefirió ser conservador y admitir una tolerancia ligeramente superior (Tol = 5.5), para agilizar el proceso de búsqueda de la aproximación inicial. Por el contrario, la tolerancia en la verificación de las restricciones en FMIN se mantuvo constante e igual a 1e-06 para todos los casos analizados.

De igual forma, el número de nidos disponibles N_d y la probabilidad p_a de que el huevo depositado por el cuco fuera descubierto por otras especies de aves se seleccionó a partir de las ejecuciones preliminares a las que se hacía referencia con anterioridad. En efecto, pudo detectarse que resulta ventajoso que N_d sea del orden del número de parámetros a ser estimados; por esta razón se escogieron los valores de 5 y 25. Cuando el número de parámetros se elevó de manera considerable, como consecuencia de asignar la variabilidad temporal a β y κ , también fue necesario incrementar la probabilidad p_a , resultando los valores de 0.075 y 0.25, respectivamente (ver Tabla 3).

Se estableció un total de 20 réplicas para cada modelo en estudio, resultando un total de 120 ejecuciones de CS-FMIN, las cuales fueron llevadas a cabo en una computadora con 12 Gb de memoria RAM y procesador Intel (R) Core (TM) i7-4500U CPU@ 2.40 GHz. En la Tabla 4 se muestra el dominio que representa el espacio de búsqueda para cada uno de los parámetros a identificar en cada uno de los modelos, los cuales también resultaron de las pruebas preliminares ya mencionadas.

Tab	la 4.	Experiment	to numérico	para los	modelos	en estudio.
-----	-------	------------	-------------	----------	---------	-------------

Modelo	Dimensión	Dominio
Ecuación (7)		m = (1, 70)
Ecuación (10)	3	n = (1, 3)
		$\alpha = (0, 1e-06)$
		m = (1, 70)
Ecuación (14)	3	n = (1, 3)
		$\beta = (0, 2.3e-05)*$



		m = (1,70)				
		n = (1, 3)				
	26					
		$\beta_i = \{\beta_{min}, \beta_{max}\}_i ; i = 1,,24 **$				
		$\beta_{min} = 0$, $\beta_{máx} = 2.3e-05$				
		m = (1,70)				
	4	n = (1, 3)				
	4	$\kappa = (0, 1e-06)*$				
		$\eta = (0, 1.0)$				
Ecuación (20)		m = (1,70)				
		n = (1, 3)				
	27	$\kappa_i = \{\kappa_{\text{min}}, \kappa_{\text{máx}}\}_i; i = 1,,24 **$				
		$\kappa_{min} = 0$, $\kappa_{max} = 1e-06$				
		$\eta = (0, 1.0)$				

^{(*); (**):} Ídem Tabla 3, en este particular 24 representa el número de meses.

Resultados y discusión

En la Tabla 5 se muestran los parámetros que, en las réplicas conducidas por el autor, presentaron el mejor desempeño en la evaluación de la función objetivo dada por la ecuación (21). En la Figura 6 se expone el comportamiento de los parámetros β y κ , donde puede apreciarse que para este último (κ) existe una alta correlación entre su valor medio mensual y la distribución que minimiza la función objetivo en su mejor ejecución. En la Figura 7 se muestra la comparación de caudales de descarga simulados y observados para los mejores desempeños de cada modelo. En la Tabla 6 se presenta el procesamiento estadístico (media μ_{θ} , desviación estándar σ_{θ} y coeficiente de variación $C_{\nu\theta}$) de las 20 réplicas ejecutadas, donde se detecta que el parámetro m exhibe las mayores variaciones con relación a su valor medio.

Tabla 5. Parámetros con mejor desempeño en la evaluación de la F.O.

Modelo	m	n	α (e-07)	β (e- 06)	к (e-07)	η	F.O (ecuación 21)
Iglesias (1984)	68.908	2.137	2.86	-	-	-	3.051
Tisson <i>et al</i> . (Pérez- Franco,	63.341	2.247	1.74	-	-	-	2.871



1995)							
Forkasiewicz y Paloc *	79.919	1.787	-	5.671	-	-	15.962
(Pérez- Franco, 1995)							
Forkasiewicz y Paloc **	76.050	1.975	-	Ver Figura	-	1	1.148
(Pérez- Franco, 1995)				7a			
Autor *	74.814	2.126	-	-	2.626	0.809	2.829
Autor**	67.208	2.144	-	-	Ver Figura 7b	0.788	0.989

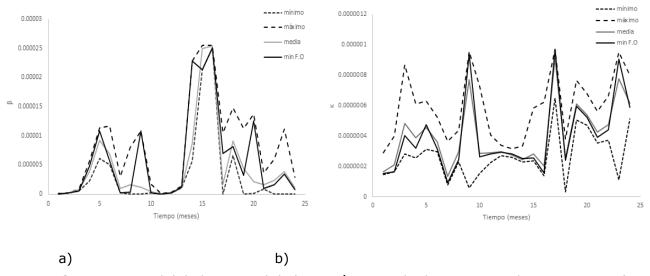


Figura 6. Variabilidad temporal de los parámetros de decrecimiento/agotamiento: a) Modelo de Forkasiewicz y Paloc; b) modelo propuesto por el autor.



Tabla 6. Resultados estadísticos para los experimentos numéricos.

								М	odelo	s de desc	arga de a	cuíferos						
Paráme tros	Iglesias (1984)			(Pérez-Franco		Forkasiewicz- Paloc* (Pérez-Franco, 1995)		Forkasiewicz-Paloc ** (Pérez-Franco, 1995)			Autor *			Autor **				
	μ_{θ}	σ_{θ}	$C_{\nu\scriptscriptstyle{\Theta}}$	μ_{θ}	σ_{θ}	$C_{v\theta}$	μ_{θ}	σ_{θ}	$C_{v\theta}$	μ_{θ}	σ_{θ}	$C_{ u heta}$	μ_{θ}	σ_{θ}	$C_{v\theta}$	$\mu_{ heta}$	$\sigma_{ heta}$	$C_{ u heta}$
т	48.6 33	242. 113	0.3 20	42.7 36	283. 959	0.3 94	68.0 20	19.2 75	0.0 65	64.947	101.22 8	0.155	57.1 83	184. 134	0.2 37	51.423	253.96 4	0.310
n	2.21	0.00 4	0.0 29	2.33 7	0.00 7	0.0 37	1.81 7	1.87 9 E-04	0.0	1.975	0.001	0.020	2.18	0.00	0.0 21	2.200	0.006	0.034
а	2.85 3 E-07	4.88 4 E-18	0.0	1.72 7 E-07	4.05 2 E-18	0.0 12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
β	-	-	-	-	-	-	5.75 1 E-06	1.01 9 E-13	0.0 56	ver figura 7	ver figura 9	ver figura 10	-	-	-	-	-	-
ĸ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.57 6 E-07	6.16 6 E-17	0.0 30	ver figura 7	ver figura 9	ver figura 10
η	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.80	0.00	0.0 37	0.787	6.707 E-05	1.041 E-02



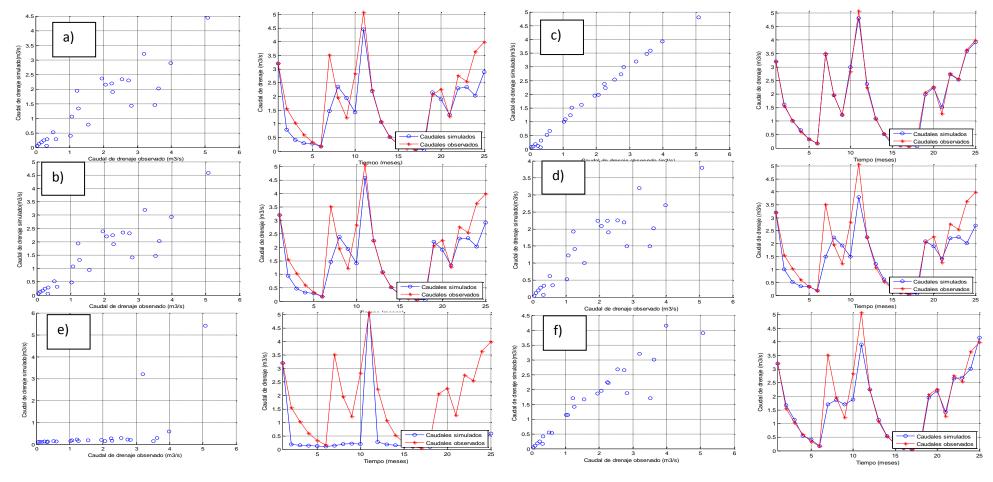


Figura 7. Comparación de los caudales simulados y observados: a) Iglesias (1984); b) Tisson *et al.* (Pérez-Franco, 1995); c) Forkasiewicz y Paloc (Pérez-Franco, 1995), con parámetro de decrecimiento β variable; e) modelo no lineal propuesto por el autor, con parámetro de agotamiento κ constante, f) modelo no lineal propuesto por el autor, con parámetro de agotamiento κ variable.



Tal y como se muestra en la Figura 8, el modelo basado en la ecuación de agotamiento dada por Forkasiewicz y Paloc presenta variaciones notables del parámetro de decrecimiento de caudal β , lo que redunda en una pobre estimación de éste en el experimento conducido, a pesar de haber mostrado el mejor desempeño en una de las réplicas de las 20 ejecutadas. El modelo no lineal presentado por el autor fue muy estable en cualquiera de sus alternativas (κ constante o variable) y competitivo, en comparación con el modelo de Iglesias (1984) y Tisson *et al.* (Pérez-Franco, 1995).

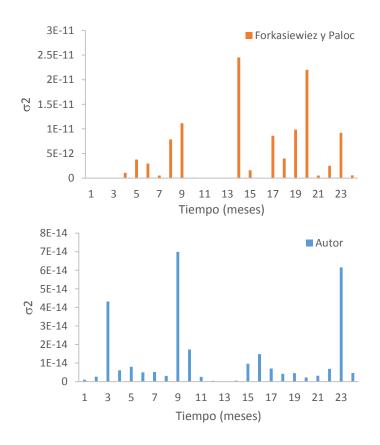


Figura 8. Varianza de los parámetros de decrecimiento/agotamiento: a) en el modelo de Forkasiewicz y Paloc (Pérez-Franco, 1995); b) en el modelo propuesto.

A pesar de disponer de una sola estación pluviométrica en este estudio para validar cada uno de los modelos tratados, es posible llevar a cabo simulaciones con cada uno de ellos, con el objetivo de restituir los datos



históricos dentro del periodo enero de 1929 a diciembre de 2010 (serie de 82 años), siendo válido destacar que el modelo de Forkasiewicz y Paloc (Pérez-Franco, 1995) se ha excluido en cualquiera de sus variantes. En la Figura 8 puede apreciarse una adecuada convergencia entre ellos para el régimen de recarga por precipitación a que fue sometido el acuífero Ciego-Morón en el periodo de referencia. Cabe señalar que aunque se observan descargas máximas mensuales que pueden llegar a superar los 10 m³/s, la tendencia de éstas es decreciente.

Conclusiones

En el presente artículo diferentes modelos agregados para estimar las descargas de acuíferos se implementaron en el asistente matemático MatLab y acoplados al algoritmo CS-FMIN, demostrándose la robustez de la estrategia abordada para reproducir series de caudales de descarga en acuíferos kársticos. En cada uno de los modelos se identificaron los parámetros relacionados con el volumen de precipitación drenado por el acuífero y aquellos que caracterizan el agotamiento.

Fue desarrollado por el autor un modelo de descarga no lineal y su desempeño demostró ser satisfactorio en los experimentos numéricos conducidos, al ser contrastado con las observaciones en la estación La Yana, y con las formulaciones de Iglesias (1984) y Tisson *et al.* (Pérez-Franco, 1995), así como de Forkasiewicz y Paloc (Pérez-Franco, 1995), siendo este último desarrollado por sus autores para medios kársticos, como el caso aquí abordado. Sin embargo, la demostrada variabilidad temporal del parámetro de decrecimiento del caudal limita esta formulación sólo al completamiento de series de caudales de descarga dentro de intervalos de tiempo específicos y no restituir datos fuera de éstos. En este sentido, la propuesta no lineal mostró gran adaptabilidad, al considerar parámetros constantes o variables en el tiempo, así como las correlaciones a las series observadas, que fueron elevadas.



Agradecimientos

El autor desea honrar al Dr. Diosdado Pérez Franco (†) y al Dr. Armando Hernández Valdés, profesores e investigadores del Centro de Investigaciones Hidráulicas, CIH, por sus valiosos aportes y certeras recomendaciones teóricas, que marcaron la orientación de esta contribución.

Referencias

- Arenillas, A., Castrillo, A., Elorza, F. J., Garrido, L., Iglesias, A., Izaguirre, E., Medina, R., De Mera, A., Pérez, M. P., & Del Río, J. C. (s.f). Paquete de apoyo informático a la hidrogeología. Tomo 2. En: Convenio para el Desarrollo de Métodos Numéricos y Programas Aplicables a la Hidrogeología. Murcia, España: Instituto Tecnológico GeoMinero de España.
- Barco, J., Wong, K. M., & Stenstrom, M. K. (2008). Automatic calibration of the U.S. EPA SWMM Model for a large urban catchment. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134(4).
- Civicioglu, P., & Besdok, E. (2011). A conceptual comparison of the Cuckoo-search, particle swarm optimization, differential evolution and artificial bee colony algorithms. *Artificial Intelligence Review*, 39(4), 315-346. DOI: 10.1007/s10462-011-9276-0
- Clerc, M., & Kennedy, J. (2002). The particle swarm—explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. IEEE *Transactions on Evolutionary Computation*, 6(1):58-73. DOI: 10.1109/4235.985692
- Iglesias, A. (1984). Diseño de un modelo para el estudio de descarga de acuíferos. Modelo MEDA. *Boletín Geológico y Minero*, 95(1), 52-57.
- Karaboga, D., & Basturk, B. (2007a). Artificial bee colony (ABC) optimization algorithm for solving constrained optimization problems. *Lecture Notes in Computer Science*, 4529, 789-798.
- Karaboga, D., & Basturk, B. (2007b). A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: Artificial bee colony (ABC) algorithm. *Journal Global Optim*, 39(3),459-471.
- Martínez-Rodríguez, J. B., Hernández-Valdés, A., Llanusa-Ruiz, H., & Dilla-Salvador, F. (1986). *Modelo matemático del acuífero Ciego-*



- *Morón (etapa de calibración)*. La Habana, Cuba: Centro Internacional de La Habana.
- Pérez-Franco, D. (1995). La explotación del agua subterránea. Un nuevo enfoque. Colombia: Editorial Científico Técnica.
- Silva-Neto, A. J., & Moura-Neto, F. D. (2005). *Problemas inversos:* conceitos fundamentais e aplicações. Río de Janeiro, Brasil: Editora da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
- Silva-Neto, A. J., & Becceneri, J. C. (2009). *Nature inspired computational intelligence techniques: application to inverse radiative transfer problems*. São Carlos, Brasil: Universidad Federal de São Carlos.
- Vidal-Olivera, V. M., & González-Abreu, F. R. (2013). Aguas superficiales y subterráneas en el Gran Humedal del Norte de Ciego de Ávila. *Revista Ingeniería Hidráulica y Ambiental*, 34(3), 57-59.
- Yang, X., & Deb, S. (2009). Cuckoo search via levy flights., *Institute of Electrical and Electronics Engineers Publications*, 4, 210-214. Recuperado de http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1003/1003.1594v1.pdf
- Yang, X., & Deb, S. (2010). Engineering optimization by Cuckoo search. *International Journal of Mathematical Modelling Numerical Optimisation*, 1(4), 330-343. Recuperado de http://arxiv.org/PS cache/arxiv/pdf/1005/1005.2908v2.pdf