

FÓRMULA EXPERIMENTAL PARA LA VELOCIDAD DE CAÍDA DE SEDIMENTOS EN FLUJO TRANSVERSAL

• Humberto Salinas-Tapia • Juan Antonio García-Aragón •
Universidad Autónoma del Estado de México

Resumen

En el presente trabajo se determinó de forma experimental la velocidad de caída de partículas sedimentarias en un canal con flujo transversal. Se utilizaron las técnicas ópticas Velocimetría por Imágenes de Partículas (PIV) para el fluido y de Velocimetría por Rastreo de Partículas (PTV) para los sedimentos. Se utilizaron siete valores de caudal líquido con números de Reynolds del fluido (Re_f) entre 4 200 y 33 000, para evaluar el efecto del movimiento del fluido en la velocidad de caída de las partículas de sedimento. A fin de obtener las componentes de la velocidad de caída de cada partícula sedimentaria, se desarrolló un *software* con la técnica PTV. Los resultados muestran que la velocidad de caída de las partículas se ve afectada por el movimiento del fluido. Se propone una expresión para el cálculo de la velocidad de caída de sedimentos que toma en cuenta ese efecto.

Palabras clave: sedimentos, velocidad de caída, PIV, PTV, tamaño de partícula, Reynolds del fluido, Reynolds de la partícula.

Introducción

Un parámetro común de ciertos análisis cuantitativos del transporte de sedimentos es determinar la velocidad de sedimentación (velocidad de caída) de partículas en un fluido en movimiento. Se han realizado diversas investigaciones para su predicción, pero muchas de las más relevantes se enfocan a partículas esféricas (Kaftori *et al.*, 1995a, 1995b; Zhiyao *et al.*, 2008; Nian-Sheng, 2009). Son básicamente dos tipos de métodos predictivos para determinar la velocidad de caída (Cheng, 1997): uno es la solución analítica de Stokes, aplicable a partículas esféricas con Reynolds de la partícula menores a la unidad, y el otro son fórmulas empíricas basadas en datos experimentales.

Calcular la velocidad de sedimentación utilizando fórmulas empíricas obtenidas a partir de experimentos que se llevan a cabo utilizando tanques de sedimentación (Ahrens, 2000; Dietrich, 1982; Hartman *et al.*, 1994; Rubey, 1933; Jiménez y Madzen, 2003; She *et al.*, 2005;

Camenen, 2007) o en tanques con movimiento oscilante (Yang y Shy, 2003), es común en la práctica ingenieril. Sin embargo, cuando un fluido está en movimiento, este efecto influye en la fuerza de arrastre de las partículas y por ende afecta la velocidad de caída, principalmente en partículas de sedimentos naturales, donde su forma es irregular.

Considerar el efecto del movimiento del fluido sobre la partícula, principalmente la relación de la velocidad del fluido (u) y la velocidad de sedimentación de la partícula (w_s), resulta interesante para su aplicación en los diversos problemas de sedimentación en corrientes naturales, situación que las relaciones empíricas no toman en cuenta.

Cuando el líquido está en movimiento, la turbulencia genera velocidades fluctuantes en la dirección vertical que afectan la velocidad de caída de las partículas (Hetsroni, 1989; Kaftori *et al.*, 1995a, 1995b). Para analizar este efecto se han utilizado partículas uniformes de densidad similar a la del agua, donde la velocidad del

fluido es mayor que la de la partícula en dirección del flujo y el efecto de turbulencia se ve reflejado en la velocidad vertical de la partícula, la cual está en función de la turbulencia, tirante, tamaño y forma de la partícula (Kaftori *et al.*, 1995a, 1995b). Sin embargo, cuando las partículas son más densas, como es el caso de los sedimentos naturales (arenas), al conocimiento de los autores no se han presentado en la literatura científica fórmulas empíricas para cuantificar la velocidad de caída de sedimentos que consideren el efecto de la turbulencia generada por el fluido en movimiento.

La presente investigación pretende determinar el efecto del fluido en movimiento en la velocidad de caída. Para el efecto se utilizaron diferentes valores del número de Reynolds del fluido (R_f), con distintos números de Reynolds de partícula (R_p), midiendo la velocidad de caída por medio de técnicas de visualización (ópticas), cuya ventaja principal es no perturbar el flujo.

La importancia de las técnicas de visualización radica en la determinación de los campos de velocidad del fluido y de las partículas sedimentarias. Las técnicas más utilizadas para este tipo de trabajos son velocimetría por imágenes de partículas (PIV) y velocimetría por rastreo de partículas (PTV); esta última permite determinar la velocidad de caída de las partículas de forma individual (Adrian, 1991; Salinas-Tapia *et al.*, 2006). Las técnicas se basan en la captura de dos o más imágenes sucesivas de una región de un flujo iluminada por una hoja de luz láser.

Metodología

Los experimentos se realizaron considerando condiciones de flujo uniforme en un canal para transporte de sedimentos de 2 m de largo y 10 x 15 cm de sección. El rango de velocidades del flujo es de 0.01 a 0.95 m/s.

Para realizar una adecuada calibración del sistema y obtener un flujo uniforme, en la entrada del canal se instaló un uniformizador

de flujo, el cual permitió distribuir de forma uniforme las partículas trazadoras en la región de análisis.

La velocidad del fluido se determinó con PIV, para ello se emplearon partículas trazadoras de poliamida de 25 μm de diámetro y densidad de 1.03 g/cm³. El cuadro 1 muestra las principales características del flujo. Para el análisis de la velocidad de caída se emplearon partículas sedimentarias de arena de mina con densidad promedio de 2 560 kg/m³, las cuales se añadieron al flujo de forma manual en la superficie. Los diámetros de las partículas analizados variaron entre 0.075 mm y 1.00 mm (ver cuadro 2).

En la medición de los campos de velocidad se utilizó un sistema PIV, que consiste en un láser doble pulsado del tipo Nd-Yag, marca NEW WAVE de 15 mJ, una cámara digital tipo CCD de marca IDT de alta resolución espacial (1 036 x 1 360 píxeles), la cual adquiere en promedio cien imágenes por segundo y un *software* de captura y procesamiento de imágenes marca Sharp-proVision PIV. En la presente investigación se capturaron en promedio cien pares de imágenes por tipo de flujo y por rango de partículas sedimentarias, con tiempo de separación (t) de 2-10 ms (milisegundos) entre cada imagen. La figura 1 presenta la instalación experimental del sistema de PIV.

Para obtener la velocidad de las partículas sedimentarias, se utilizó el algoritmo de PTV desarrollado en Salinas-Tapia *et al.* (2006). El algoritmo realiza un pre-procesamiento para mejorar la calidad de las imágenes y posteriormente realizar el procesamiento para definir la forma de las partículas de forma

Cuadro 1. Rangos de tamaño de sedimentos utilizados.

Tamiz / malla	Característica	Tamaño (mm)	Grupo
200	Arena fina	0.075 a 0.150	S1
100	Arena media	0.150 a 0.300	S2
50		0.300 a 0.425	S3
40		0.425 a 0.850	S4
20		0.850 a 1.00	S5

Cuadro 2. Características del flujo para los diferentes números de Reynolds del fluido (R_f).

Grupo	Altura $-h$ (cm)	Velocidad media teórica $-u_{med}$ (cm/s)	Número de Reynolds del fluido (R_f)	Número de Froude (Fr)	Velocidad media PIV $-u_m$ (cm/s)	Variación de la velocidad (%)
F1	5	8.5	4 200	0.1214	8.595	1.12
F2	8.5	17.4	1 4796	0.1905	17.608	1.20
F3	12.5	19.91	2 4893	0.1797	19.57	1.71
F4	7.8	36.1	2 8160	0.4127	36.45	0.97
F5	6.5	47.12	3 0904	0.5901	47.79	0.52
F6	5.7	56.09	3 1972	0.7501	55.71	0.68
F7	3.5	94.54	3 3100	1.6134	95.35	0.86

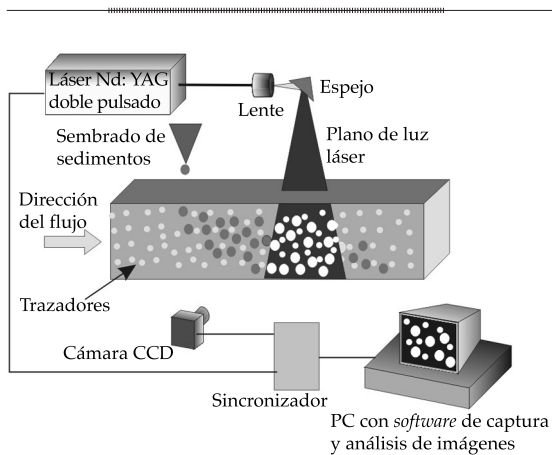


Figura 1. Montaje experimental.

individual e identificar los pares en tiempos sucesivos (t). Lo anterior, junto con los datos de distancia (d), permite determinar la velocidad de la partícula ($\bar{u} = d/t$) de forma vectorial en 2D, cuyos componentes son la velocidad en dirección del flujo (u_p) y la velocidad transversal al flujo, considerada como velocidad de caída (w_s).

Resultados

Los resultados de la parte experimental se desarrollaron en dos etapas: una utilizando partículas esféricas (trazadores de poliamida), con el objeto de determinar las características del flujo para los diferentes R_f y otra con

partículas no esféricas (sedimentos naturales), a fin de determinar la velocidad de caída para los diferentes rangos.

Para caracterizar el flujo, se obtuvieron los campos de velocidad del fluido aplicando la técnica PIV para los diferentes números de Reynolds (ver cuadro 1). En la figura 2a se presenta un campo de velocidad del fluido para $R_f = 28\ 160$. Es importante acotar que la diferencia de la media calculada con PIV en cuanto a la media teórica ($u = Q/A$) es de 0.97% para estas condiciones de flujo; por lo tanto, se considera que la técnica PIV es confiable. En el cuadro 2 se tiene la variación entre la velocidad teórica y la obtenida con PIV.

En la figura 2b se muestran los campos vectoriales de la componente de velocidad, correspondiente a la velocidad de caída (w_s) para $R_f = 28\ 160$ y grupo de sedimentos S4. En esta figura se puede apreciar la nube de sedimentos y la variabilidad de w_s obtenida aplicando la técnica PTV para los diferentes tamaños de partículas. Igualmente se observa que se obtiene un valor promedio de w_s para los diferentes tamaños dentro de un rango, de ahí la importancia de obtener las relaciones entre los diferentes diámetros de partículas y los parámetros del flujo para determinar w_s .

Una de las relaciones de suma importancia es la que existe entre la velocidad de caída (w_s), el diámetro de la partícula (D) y el Reynolds de la partícula (R_p). Diferentes investigaciones han desarrollado ecuaciones para partículas

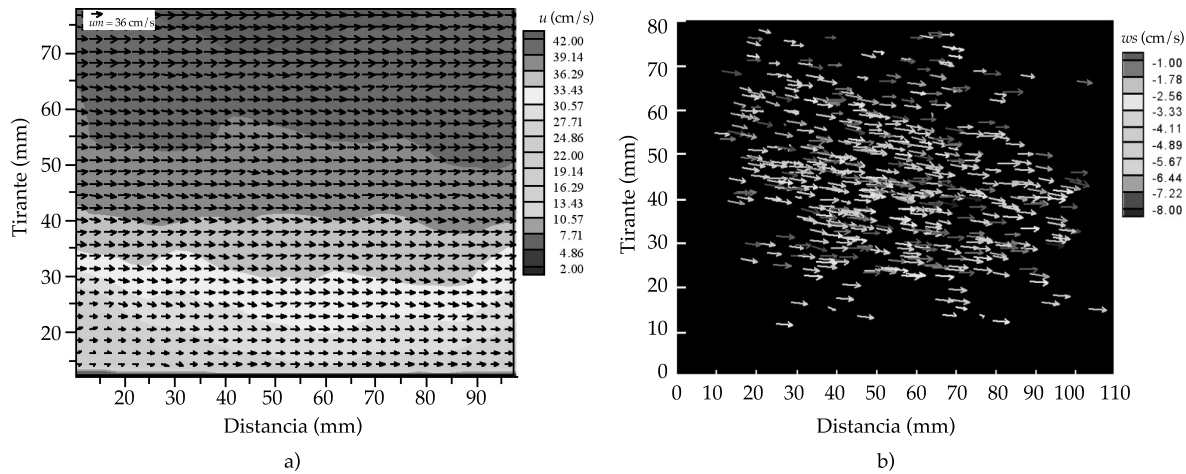


Figura 2. Campos de velocidad para $R_f = 28160$; (a) campos de velocidad del fluido promedio (u –cm/s); (b) campos de velocidad de los sedimentos en dirección transversal al fluido (velocidad de caída, w_s –cm/s) para el grupo de sedimentos S4 (0.425-0.85 mm).

de sedimentos naturales (Rubey, 1933; Dietrich, 1982; Yalin, 1977; Hallermeier, 1981; Ahrens, 2000; She *et al.*, 2005). Sin embargo, la mayoría son presentados utilizando tanques sin movimiento transversal a la velocidad de caída. De ahí la importancia de los resultados obtenidos en la presente investigación.

El número de Reynolds de la partícula (R_p) se expresa como:

$$R_p = \frac{w_s D}{\nu} \quad (1)$$

Donde D es el diámetro de la partícula; w_s la velocidad de caída de la partícula, y ν es la viscosidad cinemática del fluido. Para fines de cálculo, el diámetro de la partícula se expresa de forma adimensional como diámetro de Yalin D_{gr} :

$$D_{gr} = D \sqrt[3]{\frac{g(s-1)}{\nu^2}} \quad (2)$$

Donde s es la densidad relativa (ρ_s/ρ_f); ρ_f la densidad del fluido; ρ_s la densidad de las partículas sedimentarias, y g es la aceleración de la gravedad.

Este trabajo permite conocer experimentalmente con PIV y PTV w_s y por ende el R_p , y plantea una relación basada en la fórmula de Stokes para determinar los parámetros mencionados, considerando el efecto del movimiento del fluido (R_f) de la siguiente forma:

$$R_p = c D_{gr}^a \quad (3)$$

Donde a es un parámetro que depende sólo de R_f (en los modelos para tanques sin movimiento, este parámetro es constante); c es un parámetro que depende de R_f y de D_{gr} . Para este parámetro se usa la expresión $c = e^{\left(\frac{1}{R_f}\right)^b} - 1$, donde b depende de D_{gr} .

Sustituyendo el valor de c en la ecuación (3), se tiene que R_p de la partícula es:

$$R_p = \left(e^{\left(\frac{1}{R_f}\right)^b} - 1 \right) D_{gr}^a \quad (4)$$

En el cuadro 3 se presentan los valores de los parámetros a y b de la ecuación obtenida con el mejor ajuste a los datos experimentales y sus rangos de aplicabilidad.

Con fines de comparación y con los datos experimentales de la velocidad de caída, en la figura 3 se presenta la relación R_p versus D_{gr} , así como su curva de ajuste. Como se observa, la ecuación no depende únicamente de D_{gr} , sino también del R_f , por lo que esta ecuación es válida para fluidos en movimiento. En la figura 4 se presenta la variación del R_p con R_f en la cual se puede apreciar que a medida que aumenta la velocidad del fluido, R_p decrece, debido a que el arrastre del fluido en la vertical aumenta.

Se puede afirmar, a partir de estos resultados, que el número de Reynolds de las partículas no depende únicamente del diámetro y propiedades físicas del fluido y las partículas, sino también de las características de movimiento del fluido, condición fundamental para su aplicación en los estudios de transporte de sedimentos en fluidos con movimiento transversal a la velocidad de caída.

Para comprobar las ventajas del modelo propuesto en esta investigación, se compararon los resultados obtenidos con los valores derivados del uso de tres fórmulas clásicas: Rubey (1933), Hallermeier (1981) y She *et al.* (2005). Las fórmulas se presentan en el cuadro 4.

En la figura 5 se observa la comparación del modelo propuesto con los modelos antes mencionados para $R_f = 28\ 160$. Los resultados obtenidos por los modelos de la literatura se ajustan adecuadamente a los datos experimentales para $R_f < 15\ 000$ y para $D_{gr} < 10.5$. Esto se debe a que las velocidades del fluido son pequeñas y los sedimentos tienen diámetro menor a 0.3 mm.

Sin embargo, para $R_f > 15\ 000$ y $D_{gr} < 10.5$, se puede comprobar que los resultados presentados por los diversos autores sobres-

timan los valores experimentales. La variación es moderada del 20% con respecto a los datos experimentales (PTV) para R_f pequeños; esta diferencia aumenta a medida que se incrementa el R_f .

Para $R_f > 15\ 000$ y $D_{gr} > 10.5$, se obtuvo que los resultados presentados por los diversos autores sobrestiman aún más los valores experimentales. Principalmente los presentados por Hallermeier (1981) presentan una variación entre 40 y 50%, y She *et al.* (2005), una variación del 22 al 50%. La variación en cuanto a la fórmula de Rubey (1933) fluctúa entre 16 y 28%, en relación con los datos experimentales. Lo anterior demuestra que es importante considerar las condiciones del flujo para el análisis de transporte de sedimentos en fluidos en movimiento.

Conclusiones

La presente investigación permitió comprobar el efecto del movimiento transversal del fluido en la velocidad de caída de sedimentos en suspensión. Las técnicas ópticas PIV y PTV utilizadas permitieron determinar la velocidad de caída de partículas individuales. A partir de los resultados, se encontró una relación entre el número de Reynolds de las partículas, el tamaño de las partículas, las características físicas de éstas y del fluido, y el número de Reynolds del fluido.

Al comparar los resultados experimentales y el ajuste del modelo propuesto con aquellos obtenidos por otras fórmulas, se pudieron dilucidar las ventajas del modelo propuesto, que considera las características de movimiento del fluido para su aplicación, principalmente en estudio del transporte de sedimentos.

Cuadro 3. Valores de los parámetros de la ecuación para determinar R_p .

	$1.86 \leq D_{gr} \leq 10.5$		$D_{gr} > 10.5$
	$R_f \leq 4\ 200$	$R_f \geq 10\ 000$	$R_f \geq 10\ 000$
<i>a</i>	2.4	2.4	1.65
<i>b</i>	0.295	0.26	0.102

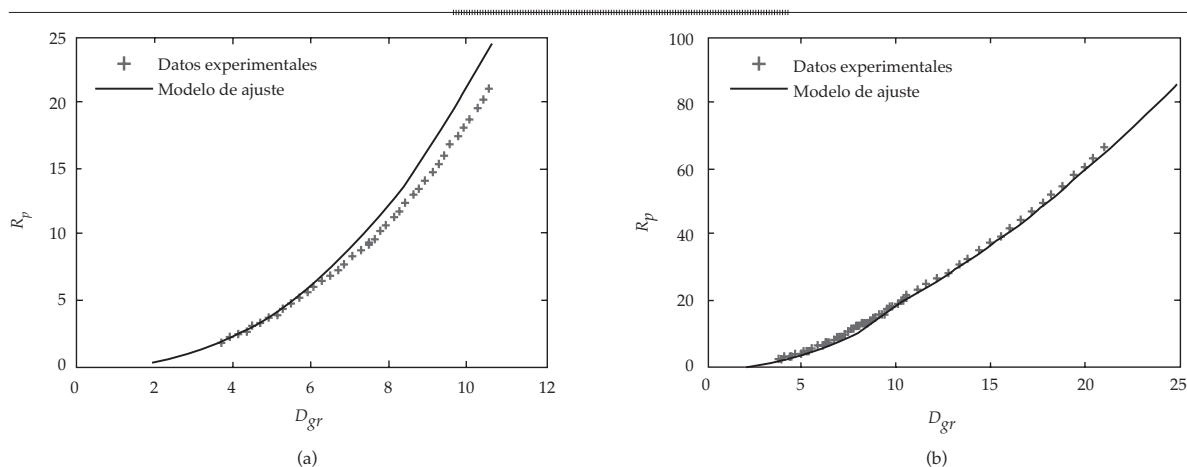


Figura 3. Ajuste del número de Reynolds de los sedimentos para los diferentes clases del fluido, (a). F2 ($R_f = 14\,746$); (b) F3 ($R_f = 24\,893$).

Cuadro 4. Fórmulas empíricas para determinar el R_p en función del D_{gr} .

Autor	Ecuación	Notas	Ecuación
Rubey, 1933	$R_p = \sqrt{\frac{2}{3} D_{gr}^3 + 36} - 6$	Para partículas esféricas	(5)
Hallermeier, 1981	$R_p = \frac{D_{gr}^3}{18}; \quad (D_{gr} \leq 2.62)$ $R_p = \frac{D_{gr}^{2.1}}{6}; \quad (D_{gr} = 2.62 - 21.54)$ $R_p = 1.05 D_{gr}^{1.5}; \quad (D_{gr} \geq 21.54)$	La primera es la ecuación de Stokes Se aplican a partículas de arena	(6)
She <i>et al.</i> , 2005	$R_p = 1.05 D_{gr}^{1.5} \left[1 - e^{-0.315 D_{gr}^{0.767}} \right]^{2.2}$	Derivada de las presentadas por Hallermeier (1981) y Ahrens (2000) para partículas de arena	(7)

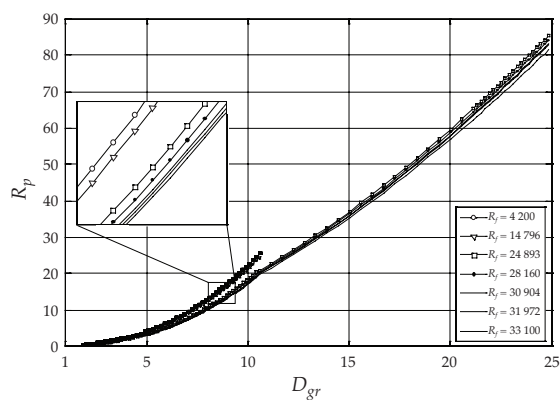


Figura 4. Variación del R_p con los diferentes R_f .

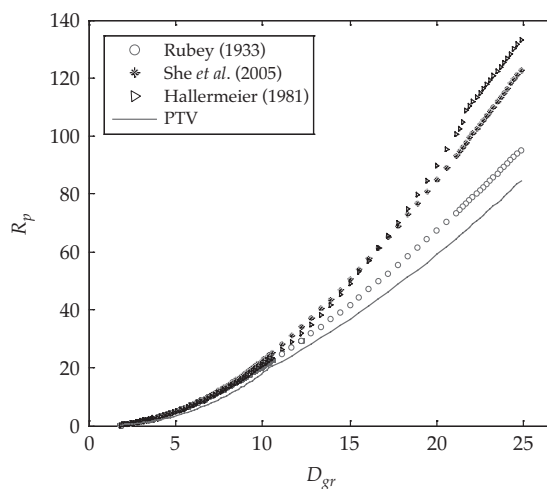


Figura 5. Comparación con la fórmulas clásicas de D_{gr} versus R_p para F4 ($R_f = 28\,160$).

Recibido: 18/12/08
Aprobado: 03/11/10

Referencias

- ADRIAN, R.J. Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annual Revue Fluid Mechanics*. Vol. 23, 1991, pp. 261-304.
- AHRENS, J.P. A fall velocity equation. *J. Water Por. Cost. Ocean Engng.* Vol. 126, No. 6, 2000, pp. 99-102.
- CAMENEN, B. Simple and general formula for the settling velocity of particles. Technical Notes. *J. Hydraul. Eng.* Vol. 133, No. 2, 2007, pp. 229-233.
- CHENG, N.S. A simplified settling velocity formula for sediment particle. *J. Hydraul. Eng. ASCE*. Vol. 123, No. 2, 1997, pp. 149-152.
- DIETRICH, W. E. Settling velocity of natural particles. *Water Resour. Res.* Vol. 18, No. 6, 1982, pp. 1615-1626.
- HALLERMEIER, J. Terminal settling velocity of commonly occurring sand grains. *Sedimentology*. Vol. 28, 1981, pp. 859-865.
- HARTMAN, M., TANKA, O., and SVOBODA, K. Free settling of non-spherical particles. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. Vol. 33, 1994, pp. 1979-1983.
- HETSRONI, G. Particles-turbulence interaction. *Int. J. Multiphase Flows*. Vol. 15, No. 5, 1989, pp. 735-746.
- JIMÉNEZ, A.J. and MADZEN, O.S. A simple formula to estimate settling velocity of natural sediments. *J. of Water, Port, Costal and Ocean Eng.* Vol. 129, No. 2, 2003, pp. 69-78.
- KAFTORI, D., HETSRONI, G., and BANERJEE, S. Particle behavior in the turbulent boundary layer. I. Motion, deposition, and entrainment. *Phys. Fluids*. Vol. 7, No. 5, 1995a, pp. 1095-1106.
- KAFTORI, D., HETSRONI, G., and BANERJEE, S. Particle behavior in the turbulent boundary layer. II. Velocity and distribution profiles. *Phys. Fluids*. Vol. 7, No. 5, 1995b, pp. 1107-1121.
- NIAN-SHENG, C. Comparison of formulas for drag coefficient and settling velocity of spherical particles. *Power Technology*. Vol. 189, No. 3, 2009, pp. 396-398.
- RUBEY, W. Settling velocities of gravel, sand and silt particles. *Am. J. Sci.* Vol. 25, 1933, pp. 325-338.
- SALINAS-TAPIA, H., GARCÍA-ARAGÓN, J.A., MORENO, D., and BARRIENTOS, G.B. Particle Tracking Velocimetry (PTV) Algorithm for Non-Uniform and Nonspherical Particles. *Proceedings, Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference, CERMA 06* [en línea]. Vol. II, Cuernavaca, Morelos, México, del 26 al 29 de septiembre de 2006, pp. 322-327. Disponible en World Wide Web: <http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/CERMA.2006.118>.
- SHE, K., TRIM, L., and POPE, D. Fall velocity of natural sediment particles: a simple mathematical presentation of the fall velocity law. *J. Hydraul. Res.* Vol. 43, No. 2, 2005, pp. 189-195.
- YALIN, M.S. *Mechanics of sediment transport*. Second edition. Oxford: Pergamon Press, 1977, pp. 69-72.
- YANG, T.S. and SHY, S.S. The settling velocity of heavy particles in an aqueous near-isotropic turbulence. *Physics of fluids*. Vol. 15, No. 4, 2003, pp. 868-880.
- ZHIYAO, S., TINGTING, W., FUMIN, X., and RUIJIE, L. A simple formula for predicting settling velocity of sediment particles. *Water Science and Engineering*. Vol. 1, No. 1, 2008, pp. 37-43.

Abstract

SALINAS-TAPIA, H. & GARCÍA-ARAGÓN, J.A. *Experimental formula for the settling velocity of sediments in cross-flow. Water Technology and Sciences, formerly Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. II, No. 2, April-June, 2011, pp. 175-182.*

In this study, the settling velocities of sediment particles for different size ranges were measured in a channel with cross-flow to the settling velocity. The optical methods of Particle Image Velocimetry (PIV) and Particle Tracking Velocimetry (PTV) were used, respectively, for the fluid and the sediments. Seven flow rates with Reynolds numbers ranging from 4 200 to 33 100 were used to evaluate the effect of fluid motion on the settling velocity of particles. In order to obtain the settling velocities of individual particles, a PTV software was developed for this research. Results show the effect of fluid motion on particle settling velocity. An expression is proposed in this work that takes this effect into account.

Keywords: sediments, settling velocity, PIV, PTV, particle size, fluid Reynolds number, particle Reynolds number.

Dirección institucional de los autores

Dr. Humberto Salinas-Tapia
Dr. Juan Antonio García-Aragón

Centro Interamericano de Recursos del Agua
Facultad de ingeniería
Universidad Autónoma del Estado de México
Cerro de Coatepec, CU
50130 Toluca, Estado de México, MÉXICO
Teléfono: +52 (722) 2965 550
Fax: +52 (722) 2965 551
hsalinast@uaemex.mx
jagarciaa@uaemex.mx