

MODELOS MULTICAPAS PARA ESTIMAR EL PERIODO DE LOS MODOS NATURALES DE OSCILACIÓN EN LAGOS Y EMBALSES TROPICALES

• José Daniel Vélez-Castaño* • Andrés Gómez-Giraldo •

Universidad Nacional de Colombia

**Autor de correspondencia*

Resumen

Las ondas internas son cruciales en los procesos de transferencia de energía en cuerpos de agua estratificados. Para entender cuáles son los efectos y sus consecuencias para el equilibrio del cuerpo de agua se hace necesario conocer su estructura espacial y su periodo. En las regiones tropicales, la estratificación térmica en la columna de agua no es tan marcada como en las regiones que presentan estaciones climáticas. En estos últimos lugares, la estratificación puede ser descrita con modelos de pocas capas, pues epilimnio e hipolimnio son fácilmente diferenciables, mientras que en las regiones tropicales se observan gradientes de temperatura significativos en casi toda la columna de agua, por lo que describir con pocas capas la estratificación puede llevar a aproximaciones poco confiables. En este trabajo se desarrolla un modelo multicapas para la estimación de los periodos de los modos naturales de oscilación en lagos y embalses con estratificaciones características del trópico. La estratificación se simplifica asumiendo capas con densidad uniforme y se considera que el cuerpo de agua tiene un fondo plano horizontal. El modelo resuelve un problema de valores y vectores propios que corresponden al conjunto de velocidades de propagación y estructura espacial de los modos naturales de oscilación. Se muestra que un modelo de tres capas es deficiente para caracterizar los modos naturales de oscilación para el embalse tropical Force II.

Palabras clave: modelo multicapas, lagos y embalses tropicales, ondas internas, limnología física.

Introducción

Una de las repuestas de un cuerpo de agua a la fuerza que ejerce el viento sobre su superficie es la generación de ondas estacionarias que ocurren en toda la dimensión del cuerpo de agua. Éstas pueden ser superficiales (barotrópicas) o internas (baroclínicas) (Lorke y Wüest, 2005), y son cruciales en los procesos de transferencia de energía en cuerpos de agua estratificados, puesto que ellas inducen esfuerzos cortantes en el interior de la masa de agua y en la interfase con los sedimentos. Las ondas estacionarias internas causan mayor desplazamiento de agua

que las ondas superficiales y por esto se les ha dado más relevancia en la limnología física (Rajasekara y Rao, 2002).

Es por lo anterior que la dinámica de las ondas estacionarias internas ha sido tratada de manera extensiva mediante observaciones y modelos durante las últimas décadas (Saggio e Imberger, 1998). Para esto se han desarrollado modelos bidimensionales que describen la dinámica de tales ondas, entre ellos, los modelos por capas homogéneas, con fondo plano y en los que no tienen importancia los efectos de rotación de la Tierra. Tales modelos simplificados permitieron realizar estimaciones

adecuadas del periodo de los modos naturales de oscilación en cuerpos de agua localizados por fuera de regiones tropicales.

Dentro de estos modelos, el más sencillo para describir los movimientos de las ondas internas es el de dos capas y fondo plano (Heaps y Ramsbottom, 1966), que tiene bastantes simplificaciones: divide la columna de agua en dos capas, las cuales están separadas por un metalimnio infinitesimalmente delgado, asume una forma del cuerpo de agua rectangular con profundidad uniforme, no hay movimiento en dirección transversal, se desprecian los efectos geostrofos, la fricción en las fronteras del cuerpo de agua es despreciada, la presión atmosférica es uniforme y constante sobre el agua, y ésta es incompresible. En este caso particular hay dos grados de libertad, que son las celeridades de la onda superficial y de la onda interna, que se propaga en la interfase de ambas capas. Así, la dinámica podría ser separada en dos componentes: la primera correspondiente a un fluido por completo homogéneo y la segunda en total dependencia de la estratificación. Esta separación reduce el sistema de cuatro ecuaciones diferenciales parciales acopladas, que gobiernan la dinámica de las dos capas a uno mucho más simple de dos, que pueden ser aplicadas tanto al movimiento barotrópico como al baroclínico (Schwab, 1977).

Por su configuración, el modelo sólo puede describir el modo superficial y el primer modo vertical de oscilación interna. Esto es una gran limitación, debido a que se sabe de modos de oscilación más altos presentes en muchos sistemas (Pérez-Losada *et al.*, 2003). A pesar de que es muy raro encontrar lagos o embalses cuya estratificación pueda ser descrita de manera correcta mediante dos capas, en la mayoría de los estudios experimentales, las estratificaciones consideradas han sido descritas mediante este tipo de modelos, sin importar que la presencia de una interfase infinitamente delgada entre dos capas pueda tener fuertes efectos sobre la respuesta del cuerpo de agua a un forzamiento externo (Monismith, 1985).

A partir del modelo de dos capas se desarrollaron modelos más detallados de estratificación adicionando capas. Cada adición permite la representación de un modo vertical interno adicional y, por consiguiente, mejorar la aproximación (Monismith, 1985). Por ejemplo, el modelo de tres capas logra una mejor aproximación a la dinámica de los cuerpos de agua y permite considerar algún espesor en el metalimnio.

Los modelos de dos y tres capas se ajustan bastante bien a cuerpos de agua donde la estratificación térmica es muy marcada y fácilmente se pueden diferenciar el epilimnio, el hipolimnio y el metalimnio, siendo este último la capa en donde se presentan los gradientes importantes de temperatura.

El anterior comportamiento es común en el verano en latitudes templadas. En regiones tropicales se presentan con frecuencia situaciones donde la zona con gradientes de temperatura ligeramente mayores se extienden mucho en la vertical y donde la diferencia de estos gradientes de temperatura con los que se encuentran en las capas superiores e inferiores no es tan marcada (Lewis, 1985). Este comportamiento dificulta la identificación del epilimnio, metalimnio e hipolimnio, y debido a que el espesor del metalimnio aumenta, la descripción de los gradientes de temperatura mediante pocas capas puede no ser adecuado y generar aproximaciones deficientes.

En este trabajo se desarrolla un modelo multicapas para lagos y embalses alargados que puedan asumirse como bidimensionales. El número de capas adecuado depende del espesor del metalimnio, aumentando cuando éste es extenso.

Generalidades de las ondas estacionarias internas

Definición y características

Las ondas estacionarias internas son una característica ubicua de los lagos y embalses que se generan debido a la acción forzante

del viento sobre una columna de agua estratificada, donde la estratificación por lo general se debe a la temperatura. Estas ondas se originan cuando el viento ejerce un esfuerzo cortante sobre la superficie de la masa de agua lo suficientemente fuerte como para moverla en la dirección del viento e inclinar la superficie libre. Este desnivel es balanceado por una inclinación del metalimnio en sentido opuesto. Cuando el viento deja de ejercer dicho esfuerzo, la inclinación cesa y la superficie libre del cuerpo de agua entra en oscilación alrededor de la posición de equilibrio, lo que se conoce como ondas superficiales o barotrópicas. Asimismo, el metalimnio también comienza a oscilar, lo que se conoce como ondas estacionarias internas o baroclínicas. Los dos movimientos ocurren al mismo tiempo, pero pueden considerarse desacoplados y forman soluciones ortogonales de la ecuación de onda (Antenucci e Imberger, 2003).

Estas ondas se asemejan a osciladores mecánicos viscosamente amortiguados y poseen un espectro de modos libres o naturales de oscilación que son definidos por las dimensiones del cuerpo de agua, su morfometría y la distribución vertical de la densidad. Estos modos libres o naturales de oscilación de las ondas en un lago o embalse tienen estructura vertical y horizontal característica. La primera está determinada por la distribución de densidad y la segunda, además de la distribución de densidad, también está determinada por la longitud del cuerpo de agua (Lemmin, 1987). De estos modos naturales, los que más se reportan en estratificaciones típicas con metalimnio delgado son el primer y el segundo modo vertical. Sin embargo, se presentan también modos más altos, pero existen escasos reportes, muchas veces porque el estudio de las ondas internas se ha enfocado en la profundidad de la termoclina y otras veces debido a que la superposición de diferentes modos pueden causar que modos más altos sean interpretados de manera equivocada como modos verticales

1 o 2 (Pérez-Losada *et al.*, 2003). La respuesta de estos movimientos al forzamiento provocado por el viento depende no sólo de la magnitud de la fuerza aplicada, sino también del grado de coincidencia entre la frecuencia forzante y las frecuencias de los modos naturales de oscilación, de la coincidencia entre la estructura horizontal del modo y del grado de amortiguamiento impuesto por la fricción.

Importancia de las ondas estacionarias internas

Las ondas internas constituyen el primer nivel en la cascada de energía en los lagos y embalses. Éstas distribuyen la energía cinética a grandes distancias desde la fuente hasta el punto en el cual son disipadas, generan flujos cortantes y turbulencia, que contribuyen a la mezcla y dispersión (Ostrovsky *et al.*, 1996). Como consecuencia, se presenta resuspensión de sedimentos y materia orgánica, afectación de la distribución espacial de organismos microscópicos y macroscópicos, afectando la variación periódica de la intensidad de la luz solar que reciben (Münnich, 1996). Estas ondas también contribuyen a la formación de una capa límite bentónica, la cual aumenta la disolución, resuspensión y el transporte de contaminantes, nutrientes y sedimentos (MacManus y Duck, 1988, en Fricker y Nepf, 2000), además del transporte vertical y horizontal de los diferentes elementos presentes en el cuerpo de agua.

Gran parte de la energía de las ondas estacionarias internas se pierde en las orillas del cuerpo de agua, donde es una gran fuente de energía para varios fenómenos que ocurren allí. La mezcla turbulenta en estas orillas puede producirse por rompimiento de las ondas estacionarias internas cerca del fondo del cuerpo de agua y por los esfuerzos cortantes inducidos por los gradientes de velocidad.

Además, existen estudios que sugieren que cerca de las orillas, la actividad de las ondas estacionarias internas afecta la productividad del lago o embalse, aumentando la circulación

de nutrientes desde el hipolimnio hasta el epilimnio (Ostrovsky *et al.*, 1996).

Por todo lo anterior, se hace necesaria la caracterización de estos movimientos oscilatorios para una correcta interpretación de la dinámica del agua, las partículas, los nutrientes y los contaminantes.

Metodología

Para aplicar un modelo multicapas a un embalse o lago tropical, se parte desde el desarrollo del modelo, que sigue los lineamientos que otros autores ya han planteado, empezando desde lo más básico.

Ecuaciones gobernantes de las ondas estacionarias internas

Para obtener las ecuaciones de un modelo de capas homogéneas bidimensional se asume que la densidad no varía dentro de cada capa, pero si lo hace entre capas y se ignora la fricción, se debe partir de las ecuaciones que representan las leyes básicas que gobiernan la dinámica de un fluido incompresible en un plano vertical. Para simplificar el problema se hacen algunas suposiciones:

- El cuerpo de agua, en equilibrio, consiste en capas horizontales de agua homogéneas con diferentes densidades. Las profundidades en equilibrio no varían.
- No hay movimiento de agua en dirección transversal y el movimiento es bidimensional.
- Los componentes de la velocidad y los desplazamientos verticales son lo suficientemente pequeños para que los términos no lineales puedan ser ignorados.
- La aceleración vertical es despreciable.
- Los efectos geostróficos pueden ser ignorados.
- Se ignora la fricción interna en las interfases entre capas.
- Se desprecian los cambios de densidad en el fluido, excepto donde se está multipli-

cando el término de la gravedad (aproximación de Boussinesq).

- Se simplifica la forma del lago o del embalse, asumiendo que es rectangular con fondo plano.

Con estas suposiciones, las ecuaciones de movimiento quedan de la siguiente forma:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dz} + \frac{\rho'}{\rho_0} g \quad (2)$$

donde el término ρ representa la variación de la densidad con respecto a una densidad de referencia ρ_0 y p es la variación de la presión en la horizontal y en la profundidad.

Los movimientos ondulatorios son considerados comúnmente como fluctuaciones alrededor del estado de reposo. En este estado, la ecuación de conservación de momentum en la dirección vertical (ecuación (2)) se reduce a la ecuación hidrostática:

$$0 = -\frac{dp}{dz} - \rho g \quad (3)$$

La ecuación de la conservación de masa es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Las ecuaciones (1), (3) y (4) se promedian en la vertical a lo largo de cada capa. Las tres ecuaciones se aplican a cada capa uniforme, por lo tanto el tamaño del sistema de ecuaciones que describe los movimientos depende de las capas que se consideren.

Las ecuaciones de conservación de momentum en un lago o embalse involucran la fuerza de gravedad y los gradientes de presión. En latitudes medias y altas, o grandes cuerpos de agua, el movimiento es afectado por la pseudo-aceleración de Coriolis, que en las

regiones tropicales es muy pequeña y suele ser despreciada (Lewis, 1985).

Una vez que la superficie del cuerpo de agua es perturbada, las interfases de las n capas (figura 1) entran en movimiento, quedando las ecuaciones (1), (3) y (4) para las n capas de la siguiente manera:

- Ecuaciones de momentum en:

Para la capa 1:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \quad (5)$$

Para la capa 2:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \epsilon_{21g} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \quad (6)$$

En general, para la capa i :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = -g \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \epsilon_{21g} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \dots - \epsilon_{i,i-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \quad (7)$$

donde:

$\xi_i(x,t)$ es el desplazamiento vertical de la interfase superior de la capa i .

$u_i(x,t)$ es la velocidad medida en la capa i .

$\epsilon_{i,i-1}$ se define como:

$$\epsilon_{i,i-1} = \frac{\rho - \rho_{i-1}}{\rho}$$

ρ es una densidad de referencia.

- Ecuaciones de conservación de masa:

Para la capa 1:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1} \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right) \quad (8)$$

Para la capa 2:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{h_2} \left(-\frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial \xi_3}{\partial t} \right) \quad (9)$$

En general, para la i -ésima capa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{h_i} \left(-\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{i+1}}{\partial t} \right) \quad (10)$$

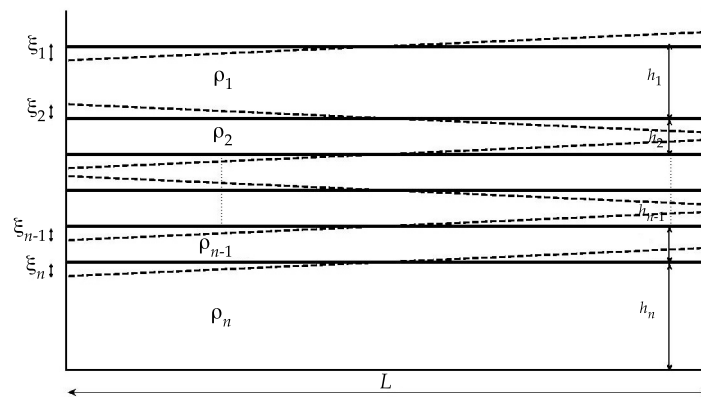


Figura 1. Esquema del modelo multicapas en un hipotético lago o embalse alargado. Las líneas continuas indican las interfaces en equilibrio, las líneas discontinuas muestran las interfaces con un desplazamiento ξ ; ρ son las densidades de cada capa y h los espesores de éstas.

Para la ecuación en la capa del fondo del lago o embalse:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = -\frac{1}{h_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial t} \quad (11)$$

donde h_i es el espesor de la n -ésima y última capa.

Desarrollo del modelo multicapas

El desarrollo que se muestra a continuación sigue los lineamientos de Monismith (1985). El sistema de ecuaciones que resulta de aplicar las ecuaciones (5) a la (11), se puede expresar como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -g A_{ij} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = -B_{ij} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \quad (13)$$

donde A y B son matrices cuadradas, cuyo número de filas y columnas es el mismo del número de capas del modelo, definidas así:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \xi_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \xi_{32} & \xi_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \xi_{42} & \xi_{43} & \xi_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \xi_{i2} & \xi_{i3} & \xi_{i4} & \cdots & \xi_{ij} \end{bmatrix}$$

donde i y j son las filas y columnas, respectivamente, ambas variando desde 1 hasta el número de capas escogidas para el modelo (n).

$$A_{ij=1} \text{ si } j=1; A_{ij} = \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{\rho_0} \\ = \varepsilon_{ij=1} \text{ si } i > j \text{ y } j \neq 1; A_{ij} = 0 \text{ si } i < j$$

donde ρ_0 es una densidad de referencia.

La matriz B se define de la siguiente forma:

$$B = \begin{bmatrix} 1/h_1 & -1/h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/h_2 & -1/h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_3 & -1/h_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/h_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/h_j \end{bmatrix}$$

donde h_j es el espesor de cada capa.

$$B_{ij} = \frac{1}{h_j} \text{ si } j=i; B_{ij} = -\frac{1}{h_j} \text{ si } j=i+1; B_{ij} \\ = 0 \text{ si } j > i \text{ o } j > i+1$$

Se tiene un sistema donde el número de ecuaciones y de incógnitas son el doble del número de capas escogidas. Estas ecuaciones están acopladas, de tal manera que el movimiento de una interfase afecta el movimiento de las otras, lo que hace que este sistema sea difícil de resolver.

Para poder solucionar el sistema, se definen las siguientes combinaciones lineales:

$$Q_m = a_{mi} u_i \quad (14)$$

$$\pi_m = a_{mi} B_{ij} \quad (15)$$

donde a_{mi} son coeficientes por determinar.

Reemplazando las ecuaciones (14) y (15) en las ecuaciones (12) y (13), se tiene que:

$$\frac{\partial Q_m}{\partial t} = -g a_{mi} A_{ij} \frac{\partial \pi_m}{\partial x} \quad (16)$$

$$\frac{\partial Q_m}{\partial x} = -\frac{\partial \pi_m}{\partial t} \quad (17)$$

Para desacoplar este sistema de ecuaciones se requiere que se cumpla la siguiente condición:

$$a_{mi}(A_{ij} - \beta_m B_{ij})\xi_j = 0 \quad (18)$$

donde β_m es una constante aún por determinar.

Reemplazando la ecuación (18) en la ecuación (16) se tiene:

$$\frac{\partial Q_m}{\partial t} = -g\beta_m \frac{\partial \pi_m}{\partial x} \quad (19)$$

Derivando la ecuación (16) con respecto a x y multiplicándola por $g\beta_m$, se obtiene:

$$g\beta_m \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -g\beta_m \frac{\partial^2 \pi_m}{\partial t \partial x} \quad (20)$$

y derivando la ecuación (19) con respecto a t se obtiene:

$$\frac{\partial^2 Q_m}{\partial t^2} = -g\beta_m \frac{\partial^2 \pi_m}{\partial x \partial t} \quad (21)$$

al igualar las ecuaciones (20) y (21) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 Q_m}{\partial t^2} - g\beta_m \frac{\partial^2 Q_m}{\partial x^2} = 0 \quad (22)$$

Siguiendo un procedimiento análogo, también se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \pi_m}{\partial t^2} - g\beta_m \frac{\partial^2 \pi_m}{\partial x^2} = 0 \quad (23)$$

Al imponer las condiciones de frontera de velocidad horizontal cero en las paredes verticales de un cuerpo de agua rectangular, la solución para la ecuación (22) toma la forma de una onda estacionaria, con nodos en las paredes verticales del embalse.

En las ecuaciones (22) y (23), las variables Q y π representan la variabilidad temporal y longitudinal de las combinaciones lineales de las velocidades (Q_m) y de la elevación de las interfases (π_m) de las capas, y definen la estructura vertical de las oscilaciones que se generan en un lago o en un embalse como respuesta a una perturbación generada, por ejemplo, por el viento. Estas oscilaciones no forzadas son llamadas nodos naturales (o normales) de oscilación del sistema. Estos nodos son desacoplados. La velocidad de propagación de cada nodo está dada por:

$$C_m = \sqrt{g\beta_m} \quad (24)$$

Para que la ecuación (18) se satisfaga, se debe cumplir que:

$$\det|A_{ij} - \beta_m B_{ij}| = 0 \quad (25)$$

Resulta que β_m son los valores propios de la ecuación (18) y cada a_{mi} es el vector propio asociado con cada β_m . Para el modelo de n capas, la ecuación (25) da como resultado un polinomio de orden n , cuyas raíces son los n valores propios (β_m) del sistema. Una vez conocidos los valores propios, se tienen los n vectores propios (a_{mi}) asociados con cada vector propio a partir de la ecuación (18). Para cada vector propio B_m se obtiene el siguiente sistema:

$$a_{m1}(A_{11} - \beta_m B_{11}) + a_{m2}(A_{21} - \beta_m B_{21}) + \dots + a_{mn}(A_{n1} - \beta_m B_{n1}) = 0 \quad (26)$$

$$a_{m1}(A_{12} - \beta_m B_{12}) + a_{m2}(A_{22} - \beta_m B_{22}) + \dots + a_{mn}(A_{n2} - \beta_m B_{n2}) = 0 \quad (27)$$

$$a_{m1}(A_{1n} - \beta_m B_{1n}) + a_{m2}(A_{2n} - \beta_m B_{2n}) + \dots + a_{mn}(A_{nn} - \beta_m B_{nn}) = 0 \quad (28)$$

Lo anterior es un sistema $n \times n$ para cada β_m , donde n es el número de capas y m es el modo natural de oscilación. Este sistema es linealmente dependiente, por lo tanto es necesario asumir una de las a_{mi} para obtener una de las infinitas soluciones posibles del problema.

Una vez obtenido Q_m , para lograr las velocidades de las capas y los desplazamientos verticales de las interfases se deben invertir las ecuaciones (14) y (15):

$$u_i = a_{mi}^{-1} Q_m \quad (29)$$

$$\xi_{ij} = (a_{mi} B_{ij})^{-1} \pi_m \quad (30)$$

con i variando desde 1 hasta n .

Q es la solución de la ecuación de onda, cuya forma (longitud de onda y periodo) está determinada por las dimensiones del cuerpo de agua y el modo horizontal que se considere.

Caso de aplicación: embalse Porce II

Descripción del área de estudio

El embalse Porce II se encuentra localizado al noreste del departamento de Antioquia ($6^\circ 48' 24.1''$ N y $75^\circ 8' 59.55''$ W), aproximadamente a 120 km de la ciudad de Medellín, Colombia. Es un lago artificial ubicado a una altura de 924.5 msnm, posee un volumen total de 149.37 millones de m^3 que inundan un área de 890 hectáreas en los municipios de Amalfi, Gómez Plata y Yolombó. Su principal afluente es el río Porce, que en su recorrido es receptor de aguas residuales e industriales del Área Metropolitana del Valle de Aburrá, y que ocasionan el deterioro de la calidad del agua de este embalse. Otros afluentes son la quebrada Guaduas, que junto al río Porce forman un brazo del embalse, y la quebrada La Cancana, que forma otro brazo del embalse. Debido a que estos brazos presentan profundidades muy bajas por su alto grado de colmatación, la

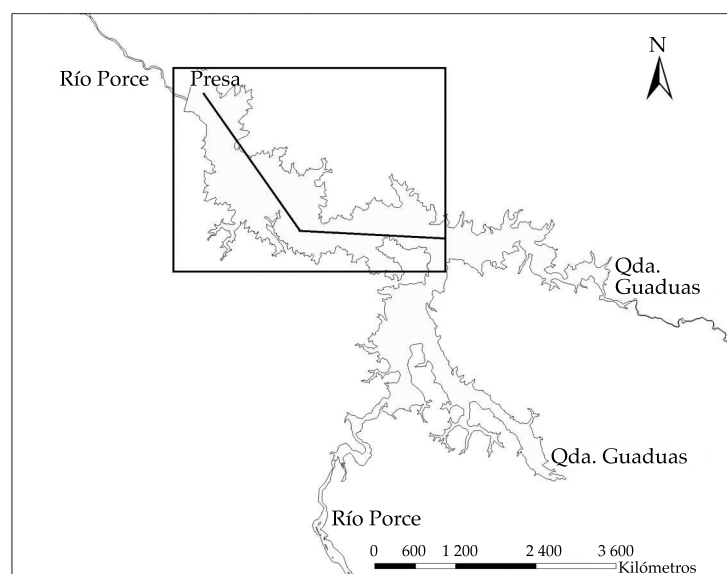


Figura 2. Embalse Porce II, zona de estudio (recuadro) y afluentes principales. La línea negra representa el eje utilizado para la medición de la longitud del embalse.

zona de estudio del embalse se toma desde la confluencia de estos dos brazos hasta la presa (figura 2).

El embalse es encañonado y presenta condiciones climáticas de región subtropical y una precipitación anual promedio de 2 000 mm. La temperatura media de la zona es de 24 °C y la velocidad superficial promedio del viento es de 3 m/s. Otras características generales del embalse en la zona de estudio se presentan en el cuadro 1.

Información y datos utilizados

Para obtener el modelo para hallar los modos libres de oscilación del embalse Porce II se utilizaron perfiles de temperatura medidos cada 30 minutos entre el 15 y el 30 de diciembre de 2008, con una cadena de termistores ubicados a 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.5, 5.5, 8.0, 10.0, 15.0, 25.0, 30.0, 40.0 y 50.0 m de profundidad. Para este periodo, la velocidad promedio del viento fue de 2.75 m/s. De la batimetría del embalse se obtuvo la profundidad media y la longitud del eje principal a nivel de la termoclina, que es aquella parte del metalimnio donde se presenta el mayor gradiente de temperatura.

Para escoger el espesor de las capas e ingresar las temperaturas al modelo, se debe obtener un perfil de temperatura representativo (figura 3). Para el caso del embalse Porce II, se promediaron todos los perfiles descritos en el párrafo anterior.

Programación del modelo multicapas

Se construye un modelo que permita calcular los periodos y las velocidades de propagación

de los modos libres de oscilación para múltiples capas, que pueda ser aplicado a cualquier lago natural o artificial alargado, asumiendo que éste tiene forma rectangular (figura 1). Para la programación de este modelo se utilizó *MATLAB*. A este modelo se le debe ingresar la siguiente información:

- El número de capas con las cuales se quiere dividir la columna de agua.
- Espesor promedio de cada capa.
- Longitud del eje principal del cuerpo de agua en la profundidad a la cual se encuentra el metalimnio.
- La temperatura promedio de cada capa o la densidad promedio de cada una de ellas.

El código permite obtener los periodos, observar la forma del desplazamiento de las interfases y la velocidad de propagación de cada modo de oscilación, según las ecuaciones y sus soluciones presentadas con anterioridad.

Aplicación del modelo multicapas

En la aplicación del modelo multicapas se tomó el perfil promedio de temperatura del embalse Porce II y se dividió en capas de temperatura uniforme según cuatro casos: tres capas, cinco capas, ocho capas y once capas, como se muestra en la figura 3, con el propósito de observar las diferencias que se presentan en la estimación de los periodos y las velocidades de propagación en los modos de oscilación a medida que aumenta el número de capas. El promedio de temperatura y de densidades de cada capa para cada caso se presenta en el cuadro 2.

Cuadro 1. Características morfométricas del embalse Porce II.

Parámetro	Valor (m)
Profundidad máxima	91.5
Longitud	6 000
Ancho máximo	1 250
Profundidad promedio	34

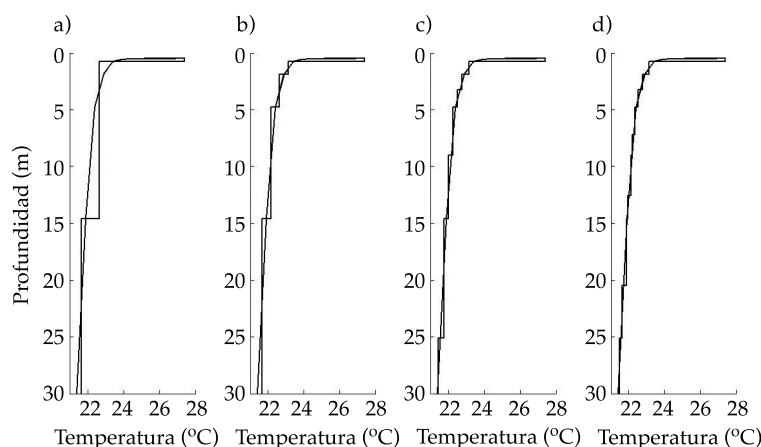


Figura 3. Perfil promedio de temperatura del embalse Porce II entre el 15 y el 30 de diciembre de 2008, y diferentes representaciones en capas uniformes: a) tres capas, b) cinco capas, c) ocho capas y d) once capas.

Cuadro 2. Espesores, temperaturas y densidades promedio de las capas para los casos estudiados.

Capa	Modelo de tres capas			Modelo de cinco capas			Modelo de ocho capas			Modelo de once capas		
	h(m)	T (°C)	(kg/m ³)	h(m)	T (°C)	(kg/m ³)	h(m)	T (°C)	(kg/m ³)	h(m)	T (°C)	(kg/m ³)
1	0.27	25.40	996.945	0.27	25.40	996.945	0.27	25.40	996.945	0.27	25.40	996.945
2	14.31	22.65	997.624	1.60	23.15	997.506	1.60	23.15	997.506	1.10	23.15	997.506
3	15.42	21.65	997.852	2.92	22.65	997.624	1.36	22.77	997.595	1.36	22.77	997.595
4				9.79	22.15	997.739	1.55	22.52	997.654	1.55	22.52	997.654
5				15.42	21.65	997.852	4.22	22.27	997.711	2.43	22.34	997.697
6							5.57	22.02	997.769	1.79	22.23	997.722
7							10.55	21.77	997.825	3.54	22.10	997.750
8							4.87	21.46	997.894	2.03	21.96	997.782
9										5.88	21.81	997.810
10										4.67	21.67	997.849
11										4.87	21.46	997.894

Resultados y discusión

El perfil promedio de temperatura del embalse Porce II corresponde a un típico perfil generado por difusión de temperatura sin una capa mezclada bien definida en la superficie; es decir, al parecer el calor que entra en la superficie del embalse es transmitido hacia zonas más profundas del embalse mediante

difusión térmica sin la participación activa del viento, a pesar de que el promedio de velocidad del viento para el periodo estudiado es de 2.75 m/s a 10 m sobre la superficie del embalse.

Los resultados de la aplicación del modelo multicapas a los cuatro casos (3, 5, 8 y 11 capas) se observan en el cuadro 3. Para n capas existen $n - 1$ modos verticales internos; sin embargo, es difícil observar en la realidad

modos energizados más allá del modo vertical 4. El objetivo al aumentar el número de capas no es encontrar más modos verticales, sino mejorar las aproximaciones de los primeros modos al hacer una discretización más fina del perfil de temperatura. Es por esta razón que en el cuadro 3 sólo se muestran hasta los cuatro primeros modos internos.

Las celeridades y los periodos de los modos naturales de oscilación interna para cada aproximación varían, mostrando que los resultados son sensibles al número de capas, pero que la variación se hace pequeña entre ocho y once capas (cuadro 3), esto debido a que cuando aumenta el número de capas, las diferencias de densidades entre éstas se hacen más pequeñas, reduciendo las diferencias en el periodo y la celeridad, mientras que cuando la discretización se hace en pocas capas, las diferencias de densidades entre éstas son altas. Por ejemplo, para los casos de ocho y once capas, las aproximaciones a los modos verticales uno, dos y tres presentan valores en los periodos y celeridades muy aproximados entre sí, mientras que las predicciones con los modelos de tres y cinco capas difieren mucho. Esto indica que es importante utilizar más de tres capas, pero que con ocho capas se obtiene resultados que se aproximan bien a los resultados de más capas y de una estratificación continua.

Conclusiones

Para embalses y lagos con el tipo de estratificación que presentó el embalse Porce II,

o aquellos que presentan una estratificación típica de zona tropical, los modelos que más se han utilizado, es decir, aquellos de dos y tres capas no son aceptables para modelar los modos naturales de oscilación, puesto que son insuficientes para describir de manera aproximada los periodos y las celeridades de las ondas internas.

Modelos de varias capas (alrededor de diez para este caso, pero dependiendo de la estratificación en particular) parecen ser apropiados para la estimación de los periodos de los modos internos de oscilación natural de lagos y embalses tropicales. Esta conclusión se formula a partir de la proximidad en las respuestas de los modelos de ocho y once capas. Esto, sin embargo, no se ha comprobado aún con mediciones de campo.

Agradecimientos

Los autores agradecen a Empresas Públicas de Medellín y en particular al ingeniero Winston Cuellar, por facilitar la información sobre los perfiles de temperatura del embalse Porce II.

Recibido: 17/10/11

Aceptado: 30/08/12

Referencias

- ANTENUCCI, J. and IMBERGER, J. The seasonal evolution of wind/internal wave resonance in lake Kinneret. *Limnology and Oceanography*. Vol. 48, No. 5, 2003, pp. 2055-2061.
- FRICKER, P.D. and NEPF, H. Bathymetry, stratification and internal seiche structure. *Journal of Geophysical Research*. Vol. 105, No. C6, 2000, pp. 14,237-14,251.

Cuadro 3. Periodos (P en horas) y celeridades (c en m/s) para cada caso.

Modo vertical	Modelo de tres capas		Modelo de cinco capas		Modelo de ocho capas		Modelo de once capas	
	P(h)	(m/s)	P(h)	(m/s)	P(h)	(m/s)	P(h)	(m/s)
Vertical 1	25.70	0.130	32.95	0.101	34.89	0.096	35.30	0.094
Vertical 2	79.12	0.042	54.43	0.061	59.78	0.056	61.93	0.054
Vertical 3			87.55	0.038	75.63	0.044	81.41	0.041
Vertical 4			113.28	0.029	92.64	0.036	96.91	0.034

- HEAPS, R. and RAMSBOTTOM, A. Wind effects on the water in a narrow two-layered lake. *Philosophical Transactions of the royal society of London. Series A, mathematical and physical sciences*. Vol. 259, No. A. 1102, 1966, pp. 391-430.
- LEWIS, W.M. Jr. Tropical Limnology. *Annual review of ecology and systematics*. Vol 18, 1985, pp. 159-184.
- LEMMIN, U. The structure and dynamic of internal waves in Baldegersee. *Limnology and Oceanography*. Vol. 32, No. 5, 1987, pp. 43-61.
- LORKE, A. and WÜEST, A. Turbulence and mixing regimes specific to lakes. In: *Marine turbulence – Theories, observations and models*. Baumert, H., Simpson, J., Sünderman, J. (editors). Cambridge: Cambridge University Press, 2005, pp. 346-354.
- MONISMITH, S. Wind-forced motions in stratified lakes and their effect on mixed-layer shear. *Limnology and Oceanography*. Vol. 30, No. 4, 1985, pp. 771-783.
- MÜNNICH, M. The influence of bottom topography on internal seiches in stratified media. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. Vol. 23, 1996, pp. 257-266.
- OSTROVSKY, I., YACOBI, Y., WALLINE, P., and KALIKHMAN, I. Seiche-induced mixing: Its impact on lake productivity. *Limnology and Oceanography*. Vol. 41, No. 2, 1996, pp. 323-332.
- PÉREZ-LOSADA, J., ROGET, E., and CASAMITJANA, X. Evidence of high vertical wave-number behavior in a continuously stratified reservoir: Boadella, Spain (Notas Técnicas). *Journal of Hydraulic Engineering*. 2003, pp. 734-737.
- RAJASEKARA, M. and RAO, Y. *Physical limnology of lakes and reservoirs*. Lake 2002: Symposium on conservation, restoration and management of aquatic ecosystems. December 9-13, 2002. Bangalore, India.
- SAGGIO, A. and IMBERGER, J. Internal wave weather in stratified lake. *Limnology and Oceanography*. Vol. 43, No. 8, 1998, pp. 1780-1795.
- SCHWAB, D. Internal free Oscillations in lake Ontario. *Limnology and Oceanography*. Vol. 22, No. 4, 1977, pp. 700-708.

Abstract

VÉLEZ-CASTAÑO, J.D. & GÓMEZ-GIRALDO, A. Multilayer models to estimate periods of natural oscillation modes in tropical lakes and reservoirs. *Water Technology and Sciences* (in Spanish). Vol. IV, No. 2, April-June, 2013, pp. 171-183.

Internal waves are essential to energy transfer processes in stratified water bodies. To understand their effects and implications for the energy balance of a water body, it is necessary to know its spatial structure and period. In tropical zones, the thermal stratification in the water column is not as strong as in zones with climatic seasons. In the latter zones, the stratification can be described with models having few layers because the epilimnion and hypolimnion are easily distinguishable, while in tropical zones significant temperature gradients are observed through most of the water column, so describing the stratification with few layers can lead to unreliable estimates. In this paper, a multilayer model is developed to calculate periods of natural oscillation modes in lakes and reservoirs with stratification typical of tropical zones. The stratification is simplified by assuming uniform density layers and the water body is considered to have a horizontal flat bottom. The model solves the eigenvalues and eigenvectors problem corresponding to sets of celebrities and the spatial structures of natural modes of oscillation. It is shown that a three-layer model is inadequate to estimate the celebrities of the natural modes of oscillation of the Porce II tropical reservoir.

Keywords: multilayer model, tropical lakes and reservoirs, internal waves, physical limnology.

Dirección institucional de los autores

Ing. José Daniel Vélez Castaño

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín
Facultad de Minas, Escuela de Geociencias y Medio Ambiente
Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos - PARH
Carrera 80 # 65-223 Bloque M2, oficina 215
Teléfono: +57 (4) 4255 105
ejdvc757@gmail.com

Dr. Andrés Gómez-Giraldo

Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín
Facultad de Minas, Escuela de Geociencias y Medio Ambiente
Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos - PARH
Carrera 80 # 65-223 Bloque M2, oficina 215
Teléfono: +57 (4) 4255 105
eagomezgi@unal.edu.co