

# NUEVO MÉTODO PARA DETERMINAR LA LONGITUD DE MEZCLA EN FLUJOS TURBULENTOS

• Alfredo Constain-Aragón\* •  
*Hydrocloro Tech, Colombia*

\*Autor de correspondencia

• Pedro Villa • Guillermo Andrés Bastidas •  
*VALREX, Colombia*

## Resumen

El comportamiento de la distribución de solutos en las secciones transversales de los flujos naturales es un tema de gran importancia para las ciencias y técnicas del campo de la ingeniería ambiental, sanitaria y civil. Los agudos problemas de la contemporaneidad que presionan fuertemente sobre el recurso hidráulico, demandan cada vez más una comprensión profunda de los fenómenos que definen el curso e impacto de las contaminaciones hídricas, principalmente. Dada la gran actualidad del tema, se han desarrollado numerosos métodos y fórmulas para determinar la llamada "Longitud de mezcla", distancia a la cual se considera que la sustancia en estudio se ha disuelto de forma uniforme en la sección transversal del fluido. Sin embargo, la gran mayoría de estas ecuaciones son de naturaleza empírica o se soportan sobre conjeturas no completamente demostradas. Por esa razón, en este artículo se presenta una aproximación racional al tema del "grado de mezcla" y se obtienen ecuaciones prácticas para su aplicación en casos reales. Estas ecuaciones tienen un amplio alcance, pues permiten estimar la pendiente del cauce sin acudir a la observación subjetiva que de manera ordinaria se hace aplicando Manning. Al final se discute en detalle la aplicación de trazador salino a un pequeño cauce de montaña en Colombia, interpretado por las nuevas relaciones. Por último se presentan conclusiones y recomendaciones.

**Palabras clave:** calidad del agua, transporte de masa en fluidos, condición de mezcla completa, trazadores, hidráulica, teoría de dispersión turbulenta.

## Introducción

El desperdigamiento aleatorio de las partículas de los contaminantes en los cauces naturales obedece a las leyes generales de la físico-química y tiene una gran importancia práctica en los actuales estudios de calidad de agua, por su impacto sobre la salud de las comunidades en las riberas. Un parámetro importante que mide ese extendimiento es la llamada condición de "Mezcla completa", que ocurre cuando la difusión transversal ha

cesado, teniendo el soluto una distribución uniforme en la sección transversal, a una distancia denominada "Longitud de mezcla". Sin embargo, el estado del arte no permite de una manera directa calcular ni anticipar con precisión este parámetro para todos los casos posibles. Esta situación contradictoria tiene varias explicaciones, entre ellas la naturaleza misma del proceso y la idiosincrasia de los medios técnicos de medición utilizados para su caracterización, por ello es necesario revisar estas bases del proceso.

### Grado de comprensión del concepto asociado con la longitud de mezcla en los flujos naturales

En primer lugar, la literatura técnica muestra un gran número de fórmulas semi-empíricas para calcular la distancia a la cual hay mezcla completa del trazador; no obstante esto, han predominado dos métodos que se examinan en seguida, indicando su fundamentación y los problemas de aplicación que plantean.

#### Fórmula clásica de Ruthven

Esta ecuación semi-empírica ha sido estudiada no sólo por Ruthven sino por Fischer y otros (ASTM, 2003). Debido a su concordancia con las observaciones, es ampliamente utilizada por el USGS de Estados Unidos y muchos organismos ambientales (Kilkpatrick y Coob, 1989). Se basa en el conocimiento de la velocidad media del cauce,  $U$ , su ancho medio,  $W$ , y el coeficiente de transporte transversal  $\epsilon_y$ :

$$L_m = \frac{k U W^2}{\epsilon_y} \quad (1)$$

Aquí,  $k = 0.1$  cuando el vertimiento del soluto considerado se hace sobre el centro del canal; si el vertimiento se hace lateral, en la orilla, vale  $k = 0.4$ .

No obstante la relativa sencillez de la fórmula, su aplicación práctica dista mucho de ser directa, pues aunque el coeficiente de proporcionalidad  $k$  es de estimación sencilla, el coeficiente transversal de difusión,  $\epsilon_y$  por lo general no se conoce con métodos directos y debe calcularse con la siguiente expresión:

$$\epsilon_y \approx 0.15 h U^* \quad (2)$$

Donde  $h$  es la profundidad promedio y  $U^*$  es la llamada "velocidad cortante", que depende de la raíz cuadrada de la pendiente de la línea de energía,  $S$ , la cual es válida

sólo en régimen uniforme, el cual rara vez se encuentra en los casos estudiados:

$$U^* = \sqrt{g h S} \quad (3)$$

Además, la propia medición de esta pendiente en el caso más simple, cuando se asume régimen uniforme, es sumamente engorrosa e imprecisa, según se aprecia en los manuales especializados, como el de la USGS (Dalrymple y Benson, 1984), o su cálculo es muy generalizado y difuso, como se aprecia en el manual de la ASTM (ASTM, 2003) (Standard Test Method for Open-Channel Measurement of Time of Travel using Dye Tracers).

#### Criterio de ganancia estable del soluto SSG

Se basa en la estimación de la llamada "Ganancia estable del sistema" o SSG en su definición inglesa (*Stable System Gain*), definida como (Camacho y Cantor, 2006):

$$SSG = \frac{\int_{t1}^{t2} c(t) dt}{\int_{t3}^{t4} c(t) dt} \approx 1 \quad (4)$$

Cada integral mide la masa por unidad de caudal. La curva es una representación de la campana Gaussiana, que produce el paso del soluto por un sitio fijo de la orilla del flujo:

$$\int_{t1}^{t2} c(t) dt = \frac{M}{Q} \quad (5)$$

En la ecuación (5), los tiempos  $t1$  y  $t2$  corresponden al inicio y terminación de la curva en el sitio 1. Igualmente, para un punto 2, "aguas abajo",  $t3$  y  $t4$  son los instantes de inicio y terminación en ese sitio. El criterio indica que cuando hay "Longitud de mezcla", el valor de SSG debe ser aproximadamente uno, en un rango de 0.95 a 1.5.

El criterio implica que se hacen muestreos del paso del soluto en función del tiempo,

siendo estos muestreos *secuenciales* en el mismo punto. Si el criterio es convergente hacia uno, entonces las dos integrales (áreas bajo la curva) deben ser convergentes entre sí:

$$\int_{t1}^{t2} c_a(t)dt = \int_{t3}^{t4} c_b(t)dt \quad (6)$$

Sin embargo, el sentido preciso del concepto en realidad no es de muestreo *secuencial longitudinal*, sino más bien de muestreo *transversal simultáneo* (figura 1).

En efecto, si lo que se quiere es verificar una distribución uniforme en la sección transversal del flujo, tiene mucho más sentido muestrear los volúmenes 1, 2 y 3 en orden transversal, que los volúmenes a y b en orden longitudinal. En el primer caso, si las tres estimaciones son convergentes entre sí, se puede asumir con buena probabilidad que la distribución del soluto es bastante homogénea en el área de la sección transversal:

$$\int_{t1}^{t2} c_1(t)dt = \int_{t1}^{t2} c_2(t)dt$$

$$= \int_{t1}^{t2} c_3(t)dt \Rightarrow \text{condición de longitud de mezcla} \quad (7)$$

En cambio, en el muestreo secuencial, si se cumple la ecuación (6), se refleja que *en ese tubo de volúmenes*, las masas por unidad coincidieron, pero no se puede extender la afirmación a volúmenes por fuera del tubo. Es claro que al final del proceso, cuando la distribución del soluto tienda a ser uniforme en todo el volumen posible de cauce (en el equilibrio termodinámico para el proceso de vertimiento), una medida longitudinal podrá extrapolarse a volúmenes externos, pero antes no. Quiere decir que el criterio va a ser de aplicación insegura por su naturaleza restringida y una decisión sobre condiciones límites no será precisa, tal como se verá en la aplicación práctica.

### Un modelo alternativo para la determinación de la condición de “Mezcla completa”

#### Fundamentos del nuevo modelo

Los problemas mencionados para las dos metodologías corrientemente usadas para saber la “Longitud de mezcla” en un vertimiento de soluto a un flujo natural indican que hay ciertas dificultades de interpretación sobre el proceso de vertimiento y su desarrollo en el tiempo. Si se observan con detenimiento los dos

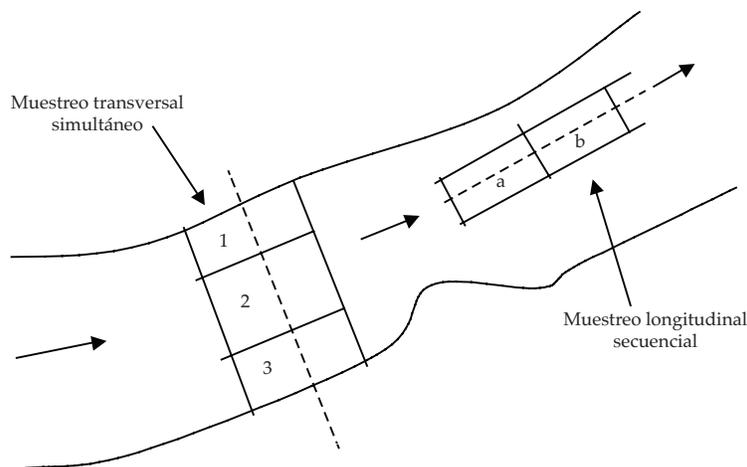


Figura 1. Muestreo transversal y longitudinal de un soluto en el tiempo.

procedimientos, es claro que sus motivaciones no apuntan a una clarificación de fondo del problema, más bien a una solución casuística, cubierta por la caracterización empírica estadística la primera, y por la observación inferente de casos no exhaustivos la segunda.

Una solución a este asunto puede ser la búsqueda y uso de una función lo suficientemente general como para que enfoque el proceso, y que al mismo tiempo tenga capacidad explicativa y predictiva en lo concreto del fenómeno. Tal función puede ser definida en el campo de la termodinámica, ya que en el fondo, el problema que se debe resolver tiene que ver con la pérdida de grados de libertad y, por definición, cumple con la exigencia de generalidad, como es bien conocido.

En este sentido, es conveniente definir una función  $\Phi(t)$  que relacione la velocidad dispersiva del soluto  $V_{disp}$  y la velocidad media advectiva del flujo,  $U$  (Constain, 2012b):

$$\phi(t) = \frac{V_{disp}}{U} \quad (8)$$

En esta dirección es posible mostrar que la velocidad de dispersión va tomando valores concordantes con la pérdida de grados de libertad hasta extinguirse en el equilibrio termodinámico. Si se acepta una naturaleza Gaussiana para el desplazamiento típico monodimensional de las partículas, se tiene:

$$V_{disp} = \frac{\Delta}{\tau} = \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \quad (9)$$

Aquí  $\tau$  y  $\Delta$  son el tiempo y la distancia característicos de la dispersión, estimados con referencia al punto de inflexión de la curva Gaussiana. Esto lleva a una ecuación de la siguiente forma, en la que el coeficiente longitudinal de dispersión es función del tiempo (Constain *et al.*, 2002):

$$U = \frac{1}{\phi(t)} \sqrt{\frac{2E(t)}{\tau}} \quad (10)$$

La función  $\Phi(t)$  es, como ya se dijo, una función de estado y da cuenta entonces de la evolución termodinámica de la pluma de soluto. Ella describe tanto una primera fase (hasta la condición de mezcla completa), en la que la difusión transversal de soluto crea la dispersión longitudinal gracias a la presencia de un campo de velocidades distribuidas en el fluido, y una segunda fase (después de la mezcla completa), en la que la difusión transversal desaparece y la transmisión de calor irreversible toma su lugar, para generar la dispersión longitudinal (Prigogine *et al.*, 1998). En otro artículo del autor se demuestra con detalle que esto ocurre para  $\Phi \approx 0.38$  (Constain, 2012a). Este criterio permitirá un cálculo preciso de la "Longitud de mezcla" para la pluma de soluto (figura 2).

#### *Predicciones de la concentración del trazador y la longitud de mezcla en función de la distancia (tiempo)*

Si en la ecuación (10) se despeja el coeficiente longitudinal de dispersión,  $E$ , se tiene:

$$E = \frac{U_x^2 \phi^2 \tau}{2} \quad (11)$$

Y si esta definición de  $E$  se reemplaza en la ecuación clásica de Fick, queda:

$$C(x,t) = \frac{M}{Q \phi t \sqrt{2\pi\beta}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2\beta\phi^2 t^2}} + C_0 \quad (12)$$

Aquí,  $Q$  es el caudal,  $\beta \approx 0.216$  es la razón entre  $\tau$ , tiempo característico de la difusión para un avance de una varianza de la curva de distribución a lado y lado (Constain, 2012b), y  $t$ , la variable independiente.  $C_0$  es la concentración de fondo del cauce. En el sitio de medición, la concentración es máxima y la ecuación anterior queda:

$$C_p = \frac{M}{Q \phi t \sqrt{2\pi\beta}} \quad (13)$$

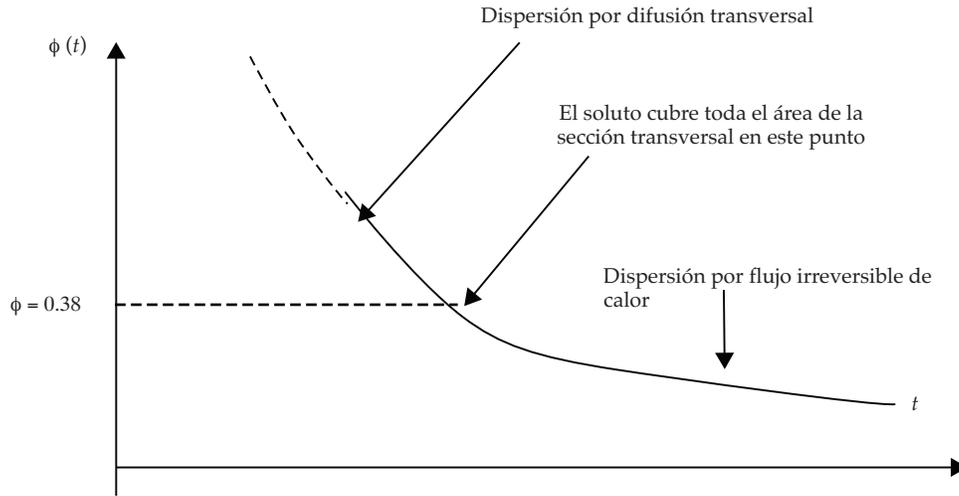


Figura 2. Forma aproximada de la función  $\Phi(t)$ .

Reubicando a  $\Phi$ :

$$C_p \phi = \frac{M}{Q t \sqrt{2\pi\beta}} \quad (14)$$

Multiplicando el numerador y denominador por  $\alpha$ , un factor de utilidad para aplicar las dos definiciones, factorizando e igualando factores a cada lado de la ecuación:

$$C_p \phi = \frac{M \alpha}{Q \alpha t \sqrt{2\pi\beta}} \quad (15)$$

Se puede demostrar que:

$$C_p \phi = \frac{M}{Q \alpha t^{(1/3)} \sqrt{2\pi\beta}} \times \alpha t^{-2/3} \quad (16)$$

Definiendo:

$$\phi = \frac{M}{Q \alpha 1.16} \times \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \quad (17)$$

Y:

$$C_p(t) = \alpha t^{-2/3} \quad (18)$$

El coeficiente  $\alpha$  se obtiene examinando cada caso experimental, así:

$$\alpha_i \approx \frac{C_p(t_i)}{(t_i)^{2/3}} \quad (19)$$

Un valor más preciso es el valor promedio para este parámetro, tomado en todas las  $n$  curvas del experimento. Una descripción completa de la evolución de plumas de contaminantes en los flujos naturales debe incluir la descripción de estas dos funciones, que permiten calcular valores de un punto, en función de los valores en otro punto.

Ahora bien, con base en la condición de que la "Longitud de mezcla" ocurre en la evolución del trazador cuando  $\Phi (X = L_m) \approx 0.38$ , se puede establecer la ecuación explícita para esta condición a partir de la ecuación (17):

$$L_m \approx \frac{11.5 M^3 U}{Q^3 \alpha^3} \quad (20)$$

Aquí, la masa  $M$  viene dada en miligramos, el caudal  $Q$  en litros/s. La velocidad media  $U$  en m/s y la constante  $\alpha$  en miligramos/litro/s <sup>(2/3)</sup>.

### Cálculo aproximado de la pendiente a partir del conocimiento de la "Longitud de mezcla"

Es bien sabido que la solución de la caracterización hidráulica de los cauces naturales, de forma aproximada se hace en función de la ecuación de Chezy para régimen uniforme:

$$U = C\sqrt{RS} \quad (21)$$

La dificultad con esta aproximación reside en que la pendiente,  $S$ , es un dato externo, como ya se dijo, y por ende depende del cálculo del coeficiente de Chezy,  $C$ , el cual debe calcularse a su vez mediante una nueva ecuación, que puede ser la de Manning (u otra):

$$C \approx \frac{R^{\frac{1}{6}}}{n} \quad (22)$$

Este "número de Manning",  $n$ , se estima de manera subjetiva, apreciando de manera detallada los diversos factores de rugosidad.

Por otra parte, combinando las ecuaciones (1), (2), (3) y (20) con  $k = 0.4$ , es posible obtener una expresión aproximada para la pendiente, sin tener que acudir a la estimación subjetiva de rugosidad de Manning:

$$S \approx \frac{0.725 U^2 W^4}{h^3 L_m^2} \quad (23)$$

Esta ecuación semi-empírica será aplicada al caso experimental documentado en seguida, utilizando el valor de Longitud de mezcla,  $L_m$ .

### Comparación con metodologías clásicas

El cuadro 1 sintetiza las diferencias significativas entre el nuevo método propuesto y los procedimientos usuales para determinar "Longitud de mezcla".

### Metodología aplicada para el uso de las nuevas ecuaciones

#### Instrumentación utilizada

Es sabido que la forma más práctica y precisa de conocer los datos tanto hidráulicos como de transporte de masa en un cauce natural es mediante trazadores. Aunque existen procedimientos o equipos con diferente principio para medir los parámetros de los estudios de calidad de aguas, como por ejemplo los mecánicos (molinetes) o los sónicos (Doppler, etc.), que presentan ciertas calidades al límite, no debe olvidarse que estos son efectos locales, no integrales y que inherentemente, la mayor cantidad de información se deriva sólo de un principio integral, como es el de la mezcla turbulenta del trazador, por ejemplo.

El autor utilizó un equipo especial diseñado por él mismo, denominado Inirida Deep Flow (IDF), que consta de lo siguiente: una PDA (computador de mano), en el que reside el *software* con las nuevas ecuaciones; una interfaz digital que acepta dos sensores de trazador a la vez (para rodamina WT y para sal común), y un juego de éstos, uno de conductividad y otro de fluorescencia. En el experimento estudiado se utilizará solamente el sensor de conductividad, pues se utilizará sal común como trazador (figura 3).

Cuadro 1. Comparación entre métodos para la estimación de "Longitud de mezcla".

Método	Fórmula de Ruthven	Criterio de "Ganancia estable del soluto"	Análisis de función de estado $\Phi(X)$
Característica.	Requiere el conocimiento del parámetro difusivo transversal, no siempre disponible.	No atiende a la distribución transversal del soluto y por lo tanto puede ser erróneo en ciertos casos.	Aplicable con facilidad. No depende de parámetros de difícil obtención.



Figura 3. Equipo IDF de medición de trazadores en tiempo real.

Este equipo, por sus características, trabaja en tiempo real, permitiendo disponer de las modelaciones de las curvas de trazador en el mismo sitio. Entre sus funciones está la del cálculo del caudal,  $Q_a$ , por medio de la ecuación clásica de conservación de la masa (5) y la del cálculo del caudal,  $Q$ , por la nueva relación (13).

#### Procedimiento utilizado

En un pequeño río de montaña se hacen 12 vertimientos súbitos (tipo "Slug") de sal con 200 gramos y utilizando el equipo IDF se hacen mediciones de la curva de trazador en función del tiempo en distancias sucesivas de 10, 20 m, y así sucesivamente, agregando cada vez 10 m hasta llegar a los 120 m (figura 4).

Enseguida se procede:

- Con los datos de cada vertimiento obtenidos de la memoria del IDF se tiene el cuadro 1.
- Se verifica la aplicación del criterio  $SSG = 1$  para establecer la "Longitud de mezcla" en el experimento concreto. Para esto se utilizan los datos de "área bajo la curva" (integrales) y se calculan las razones pertinentes, de punto a punto de medición (cuadro 2). Se grafican las razones  $SSG$  en

función de la distancia. Con esto se puede analizar la validez de tal criterio.

- Se verifican las ecuaciones propuestas en este artículo para la Longitud de mezcla. Para ello se calcula la función  $\Phi(X)$ , utilizando el valor de  $\alpha$  promedio a partir de la ecuación (19) y de acuerdo con el cuadro 3. Se grafica tanto  $\Phi(X)$  como  $C_p(X)$  y se comparan con los datos experimentales.
- Se desarrollan los valores de parámetros hidráulicos (área hidráulica, profundidad media, etc.), a partir de los datos del IDF. Con estos datos, aplicando las ecuaciones semi-empíricas y las nuevas ecuaciones para  $L_m$  y  $S$ , se calcula  $S$ . A partir de este dato y utilizando Chezy-Manning, se establece el número de Manning,  $n$ , y se compara con los datos observados de rugosidad.
- Se analizan los resultados y se obtienen conclusiones.

#### Resultados de la aplicación de las nuevas ecuaciones al estudio de un experimento con trazadores en la quebrada "La Vieja" en Bogotá, Colombia

##### Datos del IDF

Se verificarán las nuevas ecuaciones en un experimento real de un pequeño río de mon-



Figura 4. Utilización del equipo IDF en el trabajo de campo con trazadores.

taña de alta rugosidad, con una velocidad media de  $U = 0.113$  m/s y un caudal de aproximadamente 41 litros/s. El ancho estimado es de 1.5 metros. El tramo escogido (en la parta alta del cauce) no presenta secuencia “piscina-rápidos” que modifique severamente la rugosidad por efectos de forma. En la figura 5 se muestran aspectos del cauce y en la figura 6 se tiene la pantalla del instrumento IDF con los vertimientos hechos.

Los resultados obtenidos del IDF se muestran en el cuadro 2.

#### Verificación del criterio SSG→1

En el cuadro 3 se calculan los datos para aplicar el criterio, obteniéndose razones entre las áreas

bajo la curva, consecutivas para cada 10 metros. Las series 1 y 2 se utilizan para poder obtener estos datos en el cuadro. Se grafican los datos para poder establecer la bondad del criterio (figura 7).

#### Verificación de las ecuaciones propuestas para longitud de mezcla

Se calcula el dato  $\alpha$  promedio en el cuadro 4.

Por lo tanto, con este dato se pueden obtener las ecuaciones correspondientes (18) y (17) para el experimento en la quebrada “La Vieja”. Se grafican los modelos teóricos y se comparan con los datos experimentales (figuras 8 y 9).

#### Concentración pico:

Aplicando la ecuación (19) con el dato promedio de  $\alpha$  en el cuadro 4 y convirtiendo “tiempo” en “distancia” (para mayor entendimiento) del sentido físico de la fórmula, se tiene:

$$C_p(X) = 0.234 (X)^{-\frac{2}{3}}$$

La curva teórica es suave y clara, mientras que la curva experimental es oscura y más quebrada (figura 8).

#### Función $\Phi(X)$ :

Se parte de la función  $\Phi(t)$  en la ecuación (17) de la siguiente manera:



Figura 5. Aspectos del cauce estudiado.

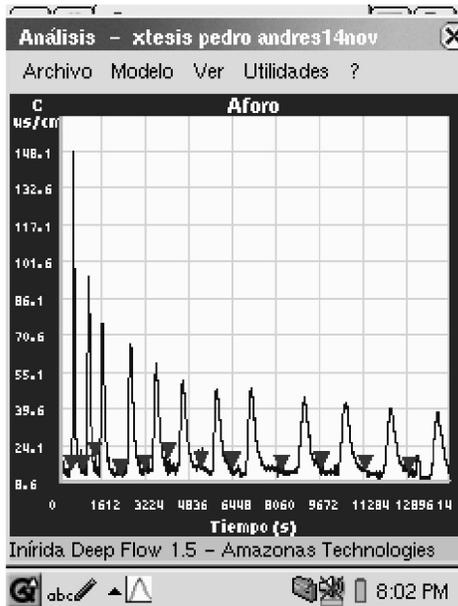


Figura 6. Pantalla del IDF con los 12 vertimientos de trazador.

$$\phi(t) = \frac{M}{Q \alpha 1.16} \times \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$$

Se reemplaza el tiempo por la distancia multiplicada por la velocidad:

$$\phi(X) = \frac{M}{Q \alpha 1.16} \times \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{X}{U}}} = \frac{M}{Q \alpha 1.16} \times \frac{\sqrt[3]{U}}{\sqrt[3]{X}}$$

Reemplazando los valores numéricos en la expresión anterior con la masa  $M$  en miligramos; el caudal  $Q$ , en litros/s; la velocidad  $U$  en metros/s, y la constante  $\alpha$  en miligramos/l/s<sup>(-2/3)</sup>, se tiene:

$$\phi(X) = \frac{(200\,000)(\sqrt[3]{0.113})}{(41.8)(1\,301.4)(1.16)} \times \frac{1}{\sqrt[3]{X}} = \frac{1.53}{\sqrt[3]{X}}$$

Con esta función se modela a curva teórica, que es el trazo oscuro suave, mientras que la curva experimental es el trazo claro y quebrado (figura 9).

#### Desarrollo de los datos hidráulicos

Se acepta como dato de referencia el dato promedio de caudal tomado por cálculos de tiempo del IDF:

$$\bar{Q} = 0.0418 \text{ m}^3/\text{s}$$

La velocidad media del cauce en el tramo es:

Cuadro 2. Datos de los 12 experimentos tomados del IDF.

$M = 200 \text{ g}$ ,  $W = 1.5 \text{ m}$ ,  $t = \text{tiempo del pico}$

Vertimiento	X (m)	t (s)	Cp (mg/l)	Φ	Q (m³/s)	Qa (m³/s)	U (m/s)	E (m²/s)	$\int_1^2 C(t)dt$
1	10	86.2	64.1	0.740	0.0422	0.0408	0.116	0.0680	4 902.0
2	20	188.7	40.3	0.508	0.0446	0.0411	0.106	0.0584	4 866.2
3	30	275.2	31.5	0.464	0.0429	0.0395	0.109	0.0751	5 063.3
4	40	354.0	26.7	0.459	0.0398	0.0324	0.113	0.102	6 172.8
5	50	446.4	22.2	0.400	0.0434	0.0417	0.112	0.096	4 796.2
6	60	512.8	18.3	0.407	0.0451	0.0431	0.117	0.125	4 640.4
7	70	583.3	16.9	0.390	0.0449	0.0443	0.120	0.136	4 514.7
8	80	701.8	17.7	0.361	0.0384	0.0345	0.114	0.127	5 797.1
9	90	833.3	15.0	0.356	0.0388	0.0382	0.108	0.132	5 235.6
10	100	885.0	14.3	0.352	0.0387	0.0366	0.113	0.150	5 464.5
11	110	964.9	13.5	0.331	0.0401	0.0400	0.114	0.147	5 000.0
12	120	1 071.4	13.1	0.290	0.0425	0.0428	0.112	0.121	4 672.9
Promedio	----			-----	0.0418	0.0396	0.113	0.111	5 093.8

Cuadro 3. Datos para calcular las razones SSG entre áreas consecutivas.

Núm.	X (m)	Q (m³/s)	$\int_{t_1}^{t_2} C(t)dt$	Serie 1	Serie 2
1	10	0.0422	4 902.0	$r_{20/10} = \frac{4\ 866.2}{4\ 902.0} = 0.9927$	$r_{30/20} = \frac{4\ 866.2}{4\ 902.0} = 1.405$
2	20	0.0446	4 866.2		
3	30	0.0429	5 063.3	$r_{40/30} = \frac{6\ 172.8}{5\ 063.3} = 1.219$	$r_{50/40} = \frac{4\ 797.2}{6\ 172.8} = 0.7772$
4	40	0.0398	6 172.8		
5	50	0.0434	4 796.2	$r_{60/50} = \frac{4\ 796.2}{4\ 640.4} = 1.033$	$r_{70/60} = \frac{4\ 514.7}{4\ 640.4} = 0.9729$
6	60	0.0451	4 640.4		
7	70	0.0449	4 514.7	$r_{80/70} = \frac{5\ 797.1}{4\ 514.7} = 1.284$	$r_{90/80} = \frac{5\ 235.6}{5\ 797.1} = 0.9031$
8	80	0.0384	5 797.1		
9	90	0.0388	5 235.6	$r_{100/90} = \frac{5\ 464.5}{5\ 235.6} = 0.9927$	$r_{110/100} = \frac{5\ 000.0}{5\ 464.5} = 0.9150$
10	100	0.0387	5 464.5		
11	110	0.0401	5 000.0	$r_{120/110} = \frac{4\ 672.9}{5\ 000.0} = 0.935$	
12	120	0.0425	4 672.9		

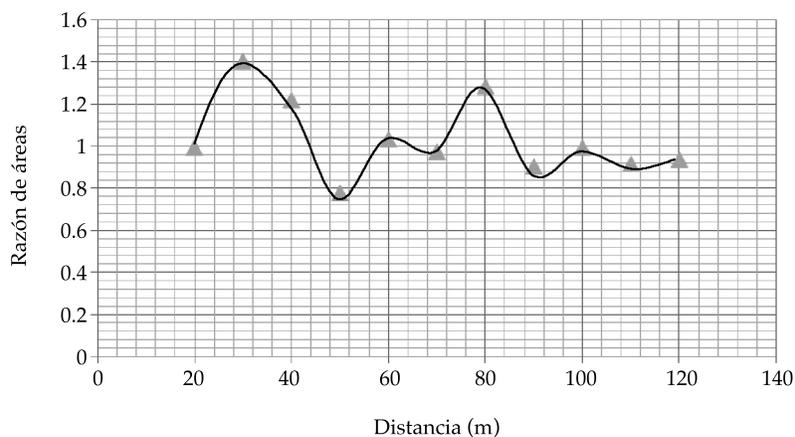


Figura 7. Graficación del criterio SSG con datos consecutivos.

$$\bar{U} = 0.113 \text{ m/s}$$

El radio hidráulico medio es:

El área hidráulica media es:

$$A = \frac{Q}{\bar{U}} = \frac{0.0418}{0.113} = 0.37 \text{ m}^2$$

$$R = \frac{A}{2h + W} = \frac{0.37}{2 \times 0.247 + 1.5} = 0.187 \text{ m}$$

La profundidad media es:

$$h = \frac{A}{W} = \frac{0.37}{1.5} = 0.247 \text{ m}$$

**Cálculo de Lm y S**

Utilizando la ecuación (20), se calcula de forma teórica la longitud de mezcla para el cauce del experimento:

Cuadro 4. Datos para calcular  $\alpha$  promedio para el experimento.

Vertimiento	X (m)	t (s)	$C_p$ (mg/l)	$\alpha_i \approx \frac{C_p(t_i)}{(t_i)^{\frac{2}{3}}} \text{ mg/l/s}^{-\frac{2}{3}}$
1	10	86.2	64.1	$\alpha_1 = 1\ 250.8$
2	20	188.7	40.3	$\alpha_2 = 1\ 325.8$
3	30	275.2	31.5	$\alpha_3 = 1\ 332.2$
4	40	354.0	26.7	$\alpha_4 = 1\ 335.6$
5	50	446.4	22.2	$\alpha_5 = 1\ 296.2$
6	60	512.8	18.3	$\alpha_6 = 1\ 172.0$
7	70	583.3	16.9	$\alpha_7 = 1\ 179.3$
8	80	701.8	17.7	$\alpha_8 = 1\ 397.2$
9	90	833.3	15.0	$\alpha_9 = 1\ 322.3$
10	100	885.0	14.3	$\alpha_{10} = 1\ 317.6$
11	110	964.9	13.5	$\alpha_{11} = 1\ 317.3$
12	120	1\ 071.4	13.1	$\alpha_{12} = 1\ 371.0$
Promedio	----	----	----	$\alpha(p) = 1\ 301.4$

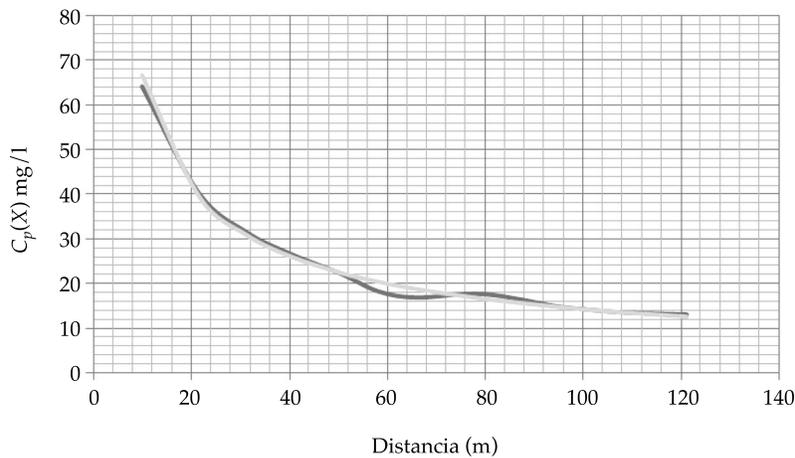


Figura 8. Graficación teórica y experimental para  $C_p(X)$ .

$$L_m \approx \frac{11.5 M^3 U}{Q^3 \alpha^3}$$

$$= \frac{11.5(200\ 000)^3(0.113)}{(41)^3(1\ 301.4)^3} = 68.4 \text{ m}$$

Utilizando la ecuación (23), se calcula la pendiente de forma teórica con  $k = 0.4$ :

$$S \approx \frac{0.725 U^2 W^4}{h^3 L_m^2}$$

$$= \frac{0.725 (0.113)^2 (1.5)^4}{(0.25)^3 (68.4)^2} \approx 0.00064$$

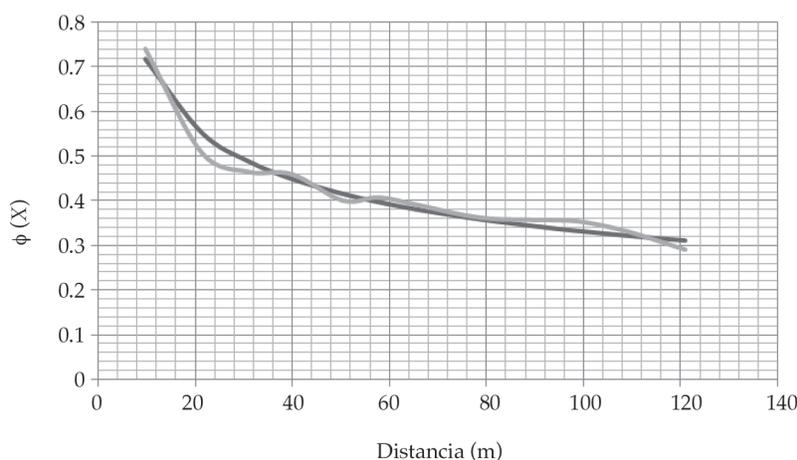


Figura 9. Graficación teórica y experimental para  $\Phi(X)$ .

#### Verificación del dato de rugosidad de Manning

Se plantea el valor del coeficiente de Chezy con los datos correspondientes:

$$C = \frac{U}{\sqrt{RS}} = \frac{0.113}{\sqrt{(0.187)(0.00064)}} = 10.3 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

Se calcula el número de Manning:

$$n = \frac{R^{\frac{1}{6}}}{C} = \frac{(0.187)^{0.16666}}{10.3} \approx 0.073$$

#### Discusión y conclusiones

Analizando la figura 7, que resume el comportamiento de las razones  $SSG$  en el tramo estudiado, es claro que tomar una decisión no es fácil, puesto que la curva en sí misma es bastante irregular hasta los 90 metros. Si por casualidad se hubieran tomado sólo dos datos, por ejemplo entre 60 y 70 metros o entre 20 y 60 metros, los datos hubieran tenido comportamientos similares, siendo por lo tanto un criterio ambiguo. La misma curva no tiene una representación analítica directa, siendo muy difícil establecer una capacidad

explicativa y predictiva. Entonces la aplicación del criterio  $SSG = 1$  no es práctica, en este caso por lo menos.

Observando las figuras 8 y 9, es claro que los datos experimentales se ajustan bien para los desarrollos teóricos de  $C_p(X)$  y  $\Phi(X)$ . El hecho de tener modelos teóricos que tienen una buena aproximación con la realidad le dan a esta teoría presentada una buena capacidad explicativa y predictiva. Esto corresponde con la naturaleza termodinámica de la función guía de la nueva teoría. Este tipo de aproximaciones son fuertemente ancladas en la realidad física.

Los cálculos teóricos para la longitud de mezcla y la pendiente son concordantes con lo observado para el cauce en estudio. Siendo un río de montaña en el tramo medido con grandes piedras y cambio de sección, un valor del número de Manning de 0.073 es una buena aproximación.

Dadas las anteriores consideraciones, se puede aceptar que el cuadro de datos es bastante coherente, implicando que las ideas teóricas que lo soportan es bastante congruente con la realidad física, como debe ser con toda teoría bien planteada. Este punto hace pensar que las ecuaciones semi-empíricas utilizadas tienen una buena precisión con los datos

experimentales, puestas en conjunción con las nuevas ecuaciones.

Este nuevo método permite traer a un terreno más fáctico y aplicable los diferentes cálculos hidráulicos y de transporte de masa. Se usa un instrumento que hace flexible y oportuno el proceso de toma de datos. Aunque se documenta en este artículo un cauce pequeño, el autor ha aplicado el procedimiento en cauces mayores, con resultados igualmente satisfactorios (Constain, 2012).

### Agradecimientos

El autor desea expresar su agradecimiento a la Universidad de la Salle por facilitar los datos de campo tomados durante la realización de un trabajo de tesis en la carrera de Ingeniería Ambiental.

Recibido: 12/10/2011

Aceptado: 18/12/2012

### Referencias

ASTM. *Standard test method for open-channel measurement of time of travel using dye tracers*. Document D 5613 (Reapproved

2003). West Conshohocken, USA: ASTM Standards International, 2003.

CAMACHO, L.A. y CANTOR, M. Calibración y análisis de la capacidad predictiva de modelos de transporte de solutos en un río de montaña colombiano. *Avances en recursos hidráulicos*. Núm. 14, Medellín, 2006, pp. 39-50.

CONSTAIN, A., LEMOS, R., and AGREDO, O.F. Applications of a non-uniform Flow velocity equation in streams. *River Flow 2002 Proceedings*. Vol. 1. Bousmar, D. and Zech, Y. (editors). Lisse, The Netherlands: A.A. Balkema Publishers, 2002, pp. 135-142.

CONSTAIN, A. Aplicaciones prácticas del principio ergódico a la condición de "Longitud de Mezcla" usando trazadores: análisis de dos cauces naturales en Colombia (río Pance y río Cali). *Revista Aqua-LAC*, UNESCO. Vol. 4, núm. 1, marzo, 2012a, pp. 30-40.

CONSTAIN, A. Definición y análisis de una función de evolución de solutos dispersivos en flujos naturales. *Revista DYNA*. Medellín. Núm. 175, octubre, 2012b, pp. 173-181.

DALRYMPLE, T. and BENSON, M. *Measurement of peak discharge by the slope-area method*. Book 3, chapter A2, Application of hydraulics. Denver: USGS, 1984.

KILKPATRICK, F. and COOB, E. *Measurement of discharge using tracers*. Book 3, Chapter A16. Washington, D.C.: USGS, 1985.

PRIGOGINE, I. and KONDEPUDI, D. *Modern Thermodynamics*. Chapter 16. Chichester UK: John Wiley & Sons, 1998.

## Abstract

CONSTAIN-ARAGÓN, A., VILLA, P. & BASTIDAS, G.A. *New method to determine mixing length in turbulent flows. Water Technology and Sciences (in Spanish). Vol. IV, No. 4, September-October, 2013, pp. 63-76.*

*The behavior of the distribution of solutes in cross-sections of natural streams is very important to sciences and field techniques pertaining to environmental, sanitary and civil engineering. Today's acute problems place strong pressures on hydraulic resources. Therefore, an in-depth understanding of the phenomena that define the course and impact of water contaminations is increasingly needed. Given the current importance of this subject, many methods and formulas have been developed to determine "mixing length" –the distance at which a substance under study uniformly dissolves in a flow cross-section. Nevertheless, a large majority of these equations are empirical or based on conjectures that are not completely substantiated. Therefore, this article presents an objective approach to the subject of the "degree of mixing" and proposes practical equations to apply to real cases. These equations have a broad scope, making it possible to measure the slope of a channel without using subjective observation, as is commonly done with the Manning procedure. Finally, the application of a salt tracer in a small mountain stream in Colombia is discussed in detail, as interpreted by the new equations, and conclusions and recommendations are presented.*

**Keywords:** *water quality, mass transport in fluids, complete mixing condition, tracers, hydraulics, turbulent dispersion theory.*

## Dirección institucional de los autores

*Ing. Alfredo Constain Aragón*

Ingeniero Gerente I+D  
Hydrocloro Tech  
Bogotá, D.C., COLOMBIA  
Teléfono celular: +57 (312) 5816 004  
alfredo.constain@gmail.com

*Ing. Pedro Villa Sacristán*

Ingeniero ambiental y sanitario  
Gerente de operaciones  
TECCA SAS  
CII 110 Núm. 9-25  
Bogotá, COLOMBIA  
Teléfono celular: +57 (300) 6198 368  
pedro.villa@tecca.com.co

*Ing. Guillermo Andrés Bastidas Sánchez*

Ingeniero ambiental y sanitario  
División de industria y proyectos especiales  
VALREX SAS  
Cr 69R núm. 78-36,  
Bogotá, D.C., COLOMBIA  
Teléfono celular: +57 (317) 7018 942  
abastidas.valrex@gmail.com