

# “ENFOQUE RÁSTER” DEL PROBLEMA HIDRODINÁMICO DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE EN 2D

• Joan Soler-Guitart • Ernest Bladé\* • Jordi Bofill-Abelló •  
*Universidad Politécnica de Catalunya, España*

\*Autor de correspondencia

• Pablo Gamazo •  
*Universidad de la República, Uruguay*

## Resumen

De manera tradicional, los sistemas de información geográfica disponen de información sobre el territorio en dos formatos: formato ráster y formato vectorial, y cada uno de estos formatos es tratado con sus algoritmos independientes. Por consiguiente, cualquier tipo de estudio hidráulico realizado sobre el territorio es una información susceptible de ser clasificada en estos dos formatos y también dispone de sus propios algoritmos. Por otro lado, *LiDAR* es la tecnología más precisa para generar Modelos Digitales de Elevaciones (MDE) para grandes áreas, con una resolución espacial de 1 o 2 m, y con una gran precisión en altura. Ello confiere un carácter ráster a la información cartográfica, cuya unidad básica de información es la *celda*. Por consiguiente, este tipo de material resulta muy adecuado para la generación de mallas de cuadriláteros, estructuradas para los modelos numéricos de flujo en lámina libre 2D. El objetivo principal es presentar una adaptación del esquema clásico explícito de primer orden de volúmenes finitos a una malla de *Volúmenes Finitos Cuadrangulares* (VFC), que hace equivaler —directamente y sin interpolaciones— cada *celda* del MDE (o ráster), con el correspondiente VFC. Por consiguiente, las dimensiones del VFC serán las de la *Celda* del MDE de base. Ello se presenta aquí como el *enfoque ráster al problema del problema hidrodinámico del flujo en lámina libre en 2D*. En el enfoque ráster, el hecho de que a cada instante de tiempo de integración no sea necesaria la consulta de la base de datos de la topología de la malla hace que el proceso numérico mejore de forma enorme su eficiencia de cálculo. Por consiguiente, se pueden abordar problemas con mayor dimensión. También es objetivo comparar ambos enfoques a través de la resolución de un ejemplo ilustrativo.

**Palabras clave:** modelización bidimensional, paralelización, aguas someras, volúmenes finitos.

## Introducción y objetivos

La información del territorio con la que los sistemas de información geográfica (SIG) trabajan viene dada en dos formatos: el formato vectorial y el formato ráster. En las plataformas de SIG existen algoritmos independientes para el tratamiento de la información, dependiendo del formato original de los datos. Por lo tanto, cualquier información procedente de un modelo

hidráulico de flujo de agua en lámina libre circulando por el territorio puede ser clasificada en estos dos formatos. Por consiguiente, los algoritmos de simulación también pueden ser independientes, con lo que son susceptibles de ser clasificados de dos maneras: enfoque vectorial y enfoque ráster.

La mayoría de los modelos numéricos de simulación del flujo en lámina libre en 2D se basan en unas representaciones geométricas del

territorio, denominadas mallas. Dichas mallas están compuestas de unidades simples, llamadas celdas o volúmenes finitos, que son polígonos de tres o cuatro lados. La implementación de la malla se hace considerando que en el interior de sus celdas se mantienen constantes las propiedades geométricas y las hidráulicas. Por lo tanto, en el contexto de los SIG, las mallas son cubiertas vectoriales de polígonos con sus correspondientes propiedades. En este trabajo se presenta una herramienta de simulación del flujo basada en un tipo de celdas denominadas volúmenes finitos cuadrangulares (VFC).

En el contexto de los modelos numéricos, cuando se requiere más precisión en los resultados o mayor cantidad de información en determinadas zonas del ámbito de estudio, es necesario crear mallas de volúmenes finitos más densas en dichas zonas y menos densas en el resto. Ello da lugar a mallas de volúmenes finitos no homogéneos, con lo que el enfoque vectorial resulta ser el más adecuado para este caso. Pero en determinadas situaciones no es necesaria una distribución de la información tan irregular, por lo que la geometría se puede representar mediante mallas uniformes de volúmenes finitos homogéneos. Y si además la celda base es cuadrangular, entonces el problema pasa a tener un enfoque ráster.

En este trabajo se define un modelo digital de elevaciones (MDE) como una representación en formato ráster de la geometría de una zona del territorio determinada. Un ráster está constituido por un conjunto de celdas cuadrangulares. Cada celda representa un área cuadrada del plano  $x/y$  de una determinada longitud de lado —longitud que se denomina lado de la celda— y un valor asignado a esta área. Cuando dicho valor es la cota media de toda la superficie de la celda, el ráster se denomina MDE. El enfoque ráster en el problema hidrodinámico del flujo en lámina libre resulta el adecuado cuando el problema tiene grandes dimensiones y la información original para la construcción de la malla proviene directamente de un MDE. Tal es el caso de los estudios de inundabilidad o

modelos para la clasificación de la rotura de un embalse en función del riesgo potencial.

Hoy día existen técnicas numéricas de resolución de las ecuaciones de flujo en lámina libre en dos dimensiones de Saint Venant —también denominadas "Shallow Waters Equations"—, mediante esquemas de volúmenes finitos para todo tipo de mallas, bien sean estructuradas y uniformes, bien sean no estructuradas y no homogéneas. En este trabajo se presenta una adaptación de una de estas técnicas numéricas a mallas con celdas cuadrangulares uniformes y estructuradas de tipo VFC. Dicho en otras palabras, se trata de una adaptación numérica al enfoque ráster porque se establece una malla homogénea y estructurada de cuadriláteros que hace equivaler —directamente y sin interpolaciones— cada *celda* del MDE con el correspondiente VFC.

Como siempre pasa en hidroinformática, cuanto más detallado es el modelo utilizado, mejor es el conocimiento que se obtiene del fenómeno, pero más difícil es su construcción y mayor su complejidad. Antaño, el uso de modelos excesivamente simplificados era obligada, porque no existían ordenadores con la potencia suficiente para el uso de modelos sofisticados. Pero hoy en día, la tecnología informática disponible permite el uso de modelos cada vez más complejos y acordes con la realidad, de manera que el establecimiento de tales hipótesis simplificadoras resulta injustificable. A lo largo de la historia han ido apareciendo hipótesis simplificadoras, que en la actualidad no tienen por qué ser establecidas:

- Régimen uniforme.
- Régimen estacionario y suavemente variable.
- Régimen no estacionario y suavemente variable.
- Unidimensionalidad.
- Bidimensionalidad.
- Distribución hidrostática de presiones.
- Sin pérdidas por infiltración.

- Continuidad espacial del coeficiente de rugosidad.
- Existencia de un flujo mínimo como condición inicial.

Por otro lado, la tecnología *LiDAR* —del inglés "Light Detection and Ranging"— es una técnica de teledetección que mide la altura del terreno utilizando un escáner láser. Hoy en día, *LiDAR* es la tecnología más precisa para generar MDE para grandes áreas, con una resolución espacial de 0.5 o 1 m, y con una precisión mínima de 15 cm en altura. Esta tecnología ofrece grandes ventajas en la obtención de los MDE, en contraposición de los sistemas fotogramétricos: permite medir la altura real del terreno a través de la vegetación, porque el rayo láser la atraviesa, tiene una precisión homogénea para toda la información del área de estudio, y reduce los costes de producción y los plazos de entrega. Por consiguiente, este tipo de material resulta muy adecuado para la generación de mallas estructuradas de VFC uniformes para los modelos numéricos de flujo en lámina libre 2D.

Por lo general, los modelos numéricos comerciales de flujo 2D en lámina libre capaces de reproducir el comportamiento del flujo circulando sobre el territorio requieren la generación de complejas mallas para la definición geométrica del problema. Estas mallas resultan muy tediosas de ser implementadas y comprometen gran parte del tiempo del personal altamente especializado, porque se trata de herramientas adaptadas al enfoque vectorial. Además, al crear la malla de volúmenes finitos, se pierde precisión por la necesidad de interpolación a partir del MDE. En resumen, en este trabajo se presenta un esquema numérico de volúmenes finitos con las siguientes características:

- Establece una malla estructurada y uniforme de cuadriláteros, que hace equivaler

—directamente y sin interpolaciones— cada celda del MDE con el correspondiente VFC. Las dimensiones del VFC serán las de la celda de base del MDE, con lo que se conserva la precisión original.

- Utiliza el esquema explícito de primer orden en volúmenes finitos de Godunov con el *Riemann solver* de Roe y con el tratamiento del término independiente propuesto por Vázquez-Cendón (Bladé y Gómez, 2006). El uso de un esquema de mayor precisión lleva consigo un incremento del tiempo de cálculo y no mejora la calidad de los resultados, dada la gran precisión de la discretización espacial utilizada.
- Esta discretización con malla estructurada y uniforme confiere al estudio hidrodinámico del flujo en dos dimensiones un enfoque ráster, en contraposición a la tradicional de malla de volúmenes finitos no estructurada y no uniforme, que se podría decir que tiene un enfoque vectorial.
- El hecho de que a cada instante de tiempo de integración no sea necesaria la consulta de la base de datos de la topología de la malla (nodo, arco y polígono) por ser conocida de antemano —porque se trata precisamente de una malla estructurada y homogénea— hace que el proceso numérico mejore de manera enorme su eficiencia de cálculo tanto por requerir menor tiempo de cálculo como menor memoria para el almacenamiento de la geometría. Por consiguiente, se pueden abordar problemas de mayor dimensión, dado que se consigue una mayor optimización del código en aras de la obtención de la máxima velocidad de cálculo y el uso de información masiva.
- El enfoque ráster es altamente paralelizable si se desea.
- Con el enfoque ráster se reduce la complejidad del preproceso y del postproceso. Por contra, con geometrías complicadas, donde se requiere la precisión del enfoque vectorial, el enfoque ráster resulta inadecuado.

- La sencillez de planteamiento del enfoque ráster se mantiene también en el establecimiento de las condiciones de contorno. Se proponen dos tipos de condiciones de contorno por defecto: *pared material* sin flujo para los lados contiguos de las celdas tipo NODATA—celdas del MDE sin información de cota— y *salida libre* de agua—para el contorno del MDE—.

Después de esta introducción, el presente documento se estructura de la siguiente manera: la segunda parte de *planteamiento matemático*, donde se describe la discretización numérica en volúmenes finitos aplicados a las ecuaciones de Saint-Venant y cómo las ecuaciones algebraicas resultantes se simplifican cuando se utilizan los VFC del enfoque ráster. Finalmente, antes de las conclusiones, se da un ejemplo práctico de aplicación del enfoque ráster.

### Planteamiento matemático

En este apartado se repasa la formulación de las ecuaciones de Saint-Venant bidimensionales, se aplica al sistema una discretización en volúmenes finitos en el caso general de mallas no estructuradas y finalmente se muestra cómo se simplifica la formulación cuando se adapta el esquema a problemas en los que es posible el uso de mallas estructuradas y homogéneas.

Hay que decir que la presentación de este apartado se ha hecho desarrollando la formulación hasta el último nivel, el de programación, donde las expresiones algebraicas resultantes finales tienen gran sencillez. Se ha hecho de esta manera para mostrar la simplificación a la que se puede llegar en la implementación del enfoque ráster en el problema hidrodinámico del flujo en lámina libre en 2D. Se han dejado sin explicación los conceptos teóricos subyacentes que pueden encontrarse en las referencias bibliográficas que se dan.

### Ecuaciones de Saint-Venant bidimensionales

Las ecuaciones de Saint-Venant bidimensionales, denominadas en inglés "Shallow Waters equations", se pueden presentar en forma conservativa y notación vectorial de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \nabla \mathbf{F} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2 \quad (1)$$

donde  $t$  es el tiempo;  $\mathbf{U}$ , el vector de variables de flujo;  $\mathbf{F}$ , el tensor de flujo;  $\mathbf{H}^1$ , la componente motriz del término independiente, y  $\mathbf{H}^2$  es la pendiente de fricción, que responden a las expresiones:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu & hv \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} & huv \\ huv & hv^2 + g \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$\mathbf{H}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{0x} \\ ghS_{0y} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{pmatrix}$$

donde  $h$  es el calado o profundidad del agua;  $u$ , la velocidad en la dirección del eje de abscisas y  $v$  la velocidad en la de las ordenadas;  $g$ , la aceleración de la gravedad;  $S_{0x}$ , la pendiente del fondo en la dirección de las abscisas,  $S_{0y}$  en el de las ordenadas y  $S_{fx}$  es la pendiente de rozamiento en la dirección de las abscisas, y  $S_{fy}$  en el de las ordenadas:

$$S_{fx} = n^2 \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}}; \quad S_{fy} = n^2 \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}} \quad (3)$$

donde  $n$  es el coeficiente de rugosidad de Manning. La ecuación (1) representan los principios de conservación de la masa y de

conservación de la cantidad de movimiento en las dos direcciones del plano  $x/y$ .

La ecuación consta de tres términos. El primero representa la variación temporal local de las variables hidráulicas: masa y cantidad de movimiento; el segundo significa la variación espacial de los flujos de dichas cantidades, y el tercero (término independiente) constituye la ganancia o pérdida de masa y cantidad de movimiento por unidad de tiempo en un volumen diferencial que se mueve con el fluido. Evidentemente, la variación de masa debe ser nula, por no incluirse ni la infiltración ni la precipitación, por lo que la primera componente de  $\mathbf{H}^1$  es cero. La contribución exterior a la cantidad de movimiento, con las hipótesis realizadas, tiene dos razones: la variación de energía potencial —reflejada en la pendiente del fondo— y las fuerzas de fricción con el contorno —reflejada en la pendiente motriz—. Las ecuaciones de Saint Venant son un caso concreto de sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólico, cuasi-lineal y con término independiente.

### Esquema numérico en volúmenes finitos

Aplicando el *Riemann solver* de Roe (Roe, 1981) para cada lado de la celda de la figura 1, en un esquema en volúmenes finitos, siguiendo los procedimientos mostrados en Toro (2009), y tratando la pendiente del fondo del término independiente según Vázquez-Cendón (1999), se obtiene el esquema numérico de primer orden utilizado en este trabajo. Todo este proceso deductivo completo puede encontrarse en detalle en Bladé y Gómez (2006), donde se llega al siguiente esquema explícito, presentado sintéticamente a modo de estructura recursiva:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2S_i} \sum_{j=1}^{N_i} \left[ \left( \mathbf{F}(\mathbf{U}_j) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) \right) \mathbf{n}_{ij} - \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mathbf{e}_k \right] \Delta l_{ij} + \Delta t \left( \mathbf{H}_i^2 \right)^n \quad (4)$$

donde:

- $i$  y  $n$  representan el índice denotativo de celda, y el de instante de tiempo de integración;  $j$  representa el índice denotativo de celda contigua a la  $i$ .
- $ij$  representa el lado compartido por las dos celdas  $i$  y  $j$  de longitud  $\Delta l_{ij}$ .
- $\Delta t$  es la longitud del paso de tiempo de integración.
- $S_i$  es la superficie en planta de la celda.
- $\mathbf{n}_{ij} = (n_x, n_y)^T$  es el vector ortonormal apuntando hacia afuera de la celda, siendo  $n_x$  y  $n_y$  sus componentes en las direcciones de los ejes coordenados.
- $\mathbf{e}_k$ :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + cn_x \\ v + cn_y \end{pmatrix}_{ij}; \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -cn_y \\ cn_x \end{pmatrix}_{ij}; \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - cn_x \\ v - cn_y \end{pmatrix}_{ij} \quad (5)$$

- $\gamma_k$ :

$$\gamma_k = \alpha_k \varphi_k + (1 - \text{signo}(\lambda_k)) \beta_k \quad (6)$$

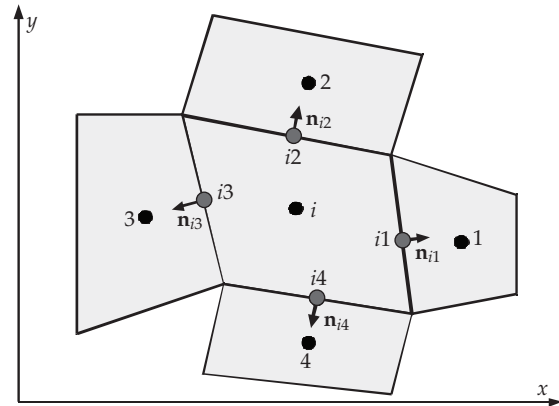


Figura 1. Discretización en volúmenes finitos de un dominio bidimensional. En este caso se representa una discretización con una malla compuesta de cuadriláteros irregulares. Aquí,  $i$  denota el elemento donde se aplicará la discretización y la estructura recursiva,  $S_i$  es la superficie que encierra el volumen y  $\mathbf{n}_{ij}$  es el vector ortonormal a lado correspondiente.

con:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,3} &= \frac{\Delta h}{2} \pm \frac{1}{2c} \left[ \Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - (un_x + vn_y)\Delta h \right] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{c} \left[ (\Delta(hv) - v\Delta h)n_x - (\Delta(hu) - u\Delta h)n_y \right] \\ \beta_1 &= -0.5c\Delta z \\ \beta_2 &= 0 \\ \beta_1 &= -0.5c\Delta z \end{aligned} \right|_{ij} \quad (7)$$

donde  $\Delta$  es un operador numérico que, aplicado sobre una variable  $f$ , vale  $\Delta f = f_j - f_i$ .

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,3} &= un_x + vn_y \pm c \\ \lambda_2 &= un_x + vn_y \end{aligned} \right|_{ij} ; \quad \Phi_k = \begin{cases} |\lambda_k| & \text{si } |\lambda_k| \geq \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & \text{si } |\lambda_k| < \varepsilon_k \end{cases}$$

con:  $\varepsilon_k = \max[0, \lambda_{ij} - \lambda_i, \lambda_j - \lambda_{ij}]$  (8)

En este esquema, las expresiones (5) a (8) son evaluadas sobre los lados compartidos mediante las siguientes interpolaciones entre las variables hidráulicas de celdas contiguas:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sqrt{g \left( \frac{h_i + h_j}{2} \right)}; \quad u_{ij} = \frac{u_i c_i + u_j c_j}{c_i + c_j}; \\ v_{ij} &= \frac{v_i c_i + v_j c_j}{c_i + c_j}; \quad c_i = \sqrt{g h_i}; \quad c_j = \sqrt{g h_j} \end{aligned} \quad (9)$$

### Adaptación a malla de volúmenes finitos cuadrangulares

En este apartado se describen los cambios necesarios para la adaptación de la formulación propuesta de (4) a (9) para una malla estructurada y homogénea de VFC al enfoque ráster.

En una malla de VFC todas sus celdas son cuadradas y homogéneas, y están dispuestas por filas y columnas, de manera que cualquier celda del dominio de integración tiene un elemento superior denotado por el subíndice

"N", uno inferior denotado por el subíndice "S", uno a la derecha denotado por el subíndice "E" y uno a la izquierda denotado por el subíndice "O". Los lados del volumen finito "I" adyacentes a cada uno de los volúmenes que lo rodean son subíndices en minúsculas por "n", "e", "s" y "o", respectivamente (figura 2). La susodicha adaptación consiste en tomar los siguientes valores:

$$\begin{aligned} N_I &= 4 \\ l_n &= \Delta x; \mathbf{n}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; l_e = \Delta y; \mathbf{n}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ l_s &= \Delta x; \mathbf{n}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; l_o = \Delta y; \mathbf{n}_o = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

y aplicarlos a las expresiones (4) a (9).

En la sección "Apéndice de expresiones algebraicas" del final de este trabajo, se dan todas las expresiones simplificadas resultantes de substituir (10) en (5) a (9). Todas ellas son de tipo algebraico y tienen una marcada sencillez. En su conjunto, sólo dependen de las cotas de los volúmenes finitos contiguos y de sus variables hidráulicas.

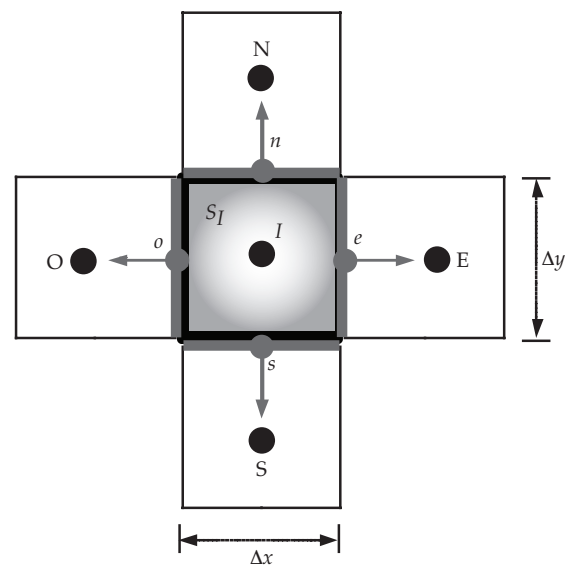


Figura 2. Discretización en volúmenes finitos de un dominio bidimensional de VFC usada en el enfoque ráster.

Finalmente, resultará muy útil definir el vector de flujo mediante la siguiente transformación del sumatorio sobre los cuatro lados de (4):

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} dh \\ dhu \\ dhv \end{pmatrix}_I^n &= \sum_{j=1}^4 \left[ \left( \mathbf{F}(\mathbf{U}_j) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) \right) \mathbf{n}_{ij} - \sum_{k=1}^{k=3} \gamma_k \mathbf{e}_k \right] \Delta L_{ij} \\
 &= \begin{pmatrix} h_N u_N \\ h_N u_N^2 + 0.5 g h_N^2 \\ h_N u_N v_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_S u_S \\ h_S u_S^2 + 0.5 g h_S^2 \\ h_S u_S v_S \end{pmatrix} \Delta x \\
 &+ \begin{pmatrix} h_E u_E \\ h_E u_E v_E \\ h_E v_E^2 + 0.5 g h_E^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_O u_O \\ h_O u_O v_O \\ h_O v_O^2 + 0.5 g h_O^2 \end{pmatrix} \Delta y \\
 &- \left[ \gamma_{1n} \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n + c_n \end{pmatrix} + \gamma_{2n} \begin{pmatrix} 0 \\ -c_n \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_{3n} \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n - c_n \end{pmatrix} \right. \\
 &+ \gamma_{1s} \begin{pmatrix} 1 \\ u_s \\ v_s - c_s \end{pmatrix} + \gamma_{2s} \begin{pmatrix} 0 \\ c_s \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_{3s} \begin{pmatrix} 1 \\ u_s \\ v_s + c_s \end{pmatrix} \left. \right] \Delta x \\
 &- \left[ \gamma_{1e} \begin{pmatrix} 1 \\ u_e + c_e \\ v_e \end{pmatrix} + \gamma_{2e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_e \end{pmatrix} + \gamma_{3e} \begin{pmatrix} 1 \\ u_e - c_e \\ v_e \end{pmatrix} \right. \\
 &+ \gamma_{1o} \begin{pmatrix} 1 \\ u_o - c_o \\ v_o \end{pmatrix} + \gamma_{2o} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_o \end{pmatrix} + \gamma_{3o} \begin{pmatrix} 1 \\ u_o + c_o \\ v_o \end{pmatrix} \left. \right] \Delta y \quad (11)
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el vector de flujo (11) y los demás vectores originales, el esquema general de actualización temporal (4), útil para cualquier tipo de malla, queda adaptado para su utilización en el contexto del enfoque ráster mediante la siguiente estructura recursiva:

$$\begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}_I^{n+1} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}_I^n - \frac{\Delta t}{2S_I} \begin{pmatrix} dh \\ dhu \\ dhv \end{pmatrix}_I^n - \Delta t \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{fx} \\ ghS_{fy} \end{pmatrix}_I^n \quad (12)$$

### Condiciones de contorno

En la gran mayoría de casos, la cartografía utilizada para los estudios de inundabilidad y de clasificación en función del riesgo potencial de balsas presenta grandes zonas donde no se dispone de información altimétrica susceptible de ser utilizada para la creación de los correspondientes MDE. Los VFC o celdas afectados por esta falta de información se denominan de tipo NODATA. La razón de ello es el ahorro que se tiene cuando no se comparan zonas donde se supone, en principio, que no debe circular agua.

El tratamiento que se hace sobre los NODATA y los contornos delimitados por las edificaciones es el del establecimiento de una condición de contorno tipo pared material, por donde el flujo no puede pasar. Desde el punto de vista numérico, cuando a un VFC se le va a aplicar (12) para actualizar en el tiempo las variables y cuando alguno de los volúmenes,  $N$ ,  $E$ ,  $S$  o  $O$  es de tipo NODATA, se mantiene el mismo esquema, pero asignando a los NODATA los siguientes valores:

$$h_j^k = h_I^k ; u_j^k = -u_I^k ; v_j^k = -v_I^k \quad (13)$$

donde ahora  $j$  es el subíndice de VFC tipo NODATA;  $I$ , el subíndice del VFC adyacente al  $j$  con el que comparte el lado;  $h$ , el calado;  $u$ , la velocidad en el eje de las abscisas, y  $v$  es la velocidad en el eje de las ordenadas en el instante  $n$ .

La gracia de (13) está en el hecho de que se anulan los promedios (9) de las velocidades en el lado compartido, siendo nulo el flujo a través del mismo, pero manteniendo inalterado el esquema (11)-(12).

La presencia de volúmenes NODATA adyacentes a un VFC da lugar a 15 combinaciones

posibles, que generan los correspondientes tipos de celda. En la figura 3 se muestra un esquema de todas las posibles combinaciones entre volúmenes normales de tipo 1 y los NODATA. El tipo de combinación pasa a ser una nueva propiedad de todas las celdas —que describe la estructura topológica de malla— y debe subministrarse con el mismo formato ráster de entrada de datos de las demás propiedades hidráulicas.

La existencia de VFC de tipo NODATA da la posibilidad de utilizar esta figura para simular el comportamiento del flujo al entorno de algunas estructuras, como los pilares de los puentes. Ello puede llevarse a cabo siempre y cuando sea posible componer la sección del pilar mediante cuadrados NODATA de la precisión del MDE utilizado (longitud del lado de la celda).

El tratamiento que se hace sobre los contornos rectilíneos de los márgenes de la serie cartográfica (digamos la primera y última filas del ráster, y primera y última columnas) que constituye el modelo, es tratado como

condición de contorno de tipo *salida libre de agua*:

$$h_j^n = h_I^n ; u_j^n = u_I^n ; v_j^n = v_I^n \quad (14)$$

donde ahora el subíndice  $j$  representa cualquier VFC perteneciente al contorno de la serie cartográfica e  $I$  representa el subíndice de cualquier VFC adyacente al contorno con el que comparte un lado.

### Ejemplo ilustrativo

Como ejemplo ilustrativo se propone el estudio de un tramo del río Tajo (España) de unos 20 km, cuyo modelo digital de elevaciones (MDE) tiene el sistema de referencia horizontal UTM del uso 30-norte del Instituto Geográfico Nacional de España. En este sistema de referencia, el ámbito viene dado por el recuadro de  $X$  mínima: 389 522 m; de  $X$  máxima: 397 802 m; de  $Y$  mínima: 4 417 623 m, y de  $Y$  máxima: 4 429 603 m. Por lo tanto, el ancho de recuadro es de 8.280 km

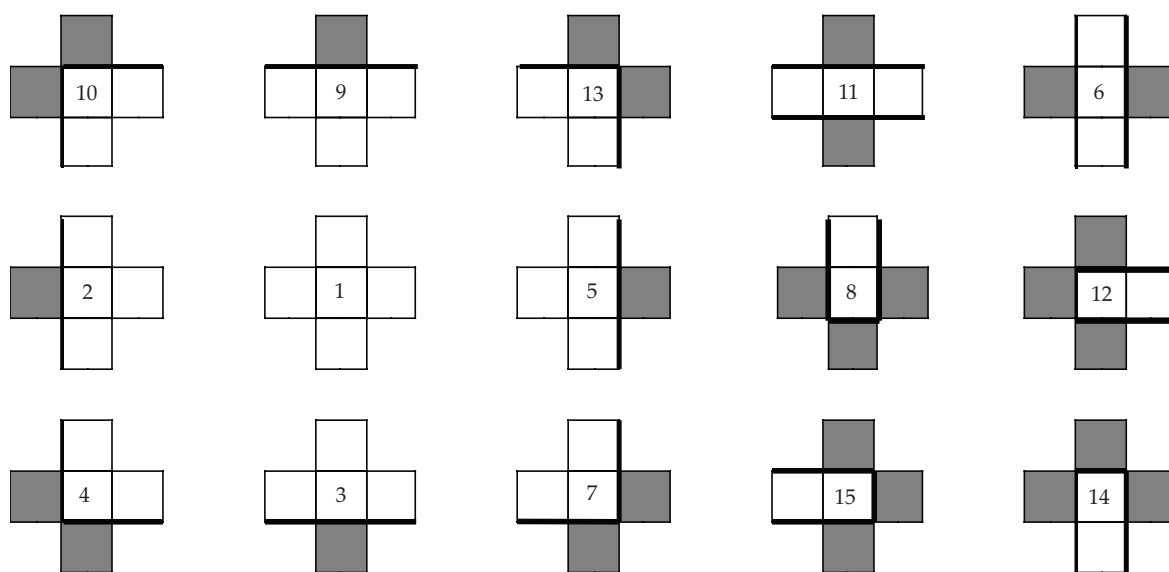


Figura 3. Tipos de volúmenes con condiciones de contorno tipo *Pared material* en algunos de los volúmenes adyacentes. En gris se representa un VFC de tipo NODATA. Los 15 tipos representan todas las combinaciones posibles. La topología de la malla queda definida por un solo número, que pasa a ser una propiedad más de la celda.

y el de alto 11.980 km. Si la dimensión de la celda/VFC es de 5 x 5 m, entonces el número de columnas del ráster será de 1 656 y el de filas de 2 396, dando lugar a un número total de celdas o VFC de 3 967 776, de los cuales el número total de celda/VFC con información de cota es 717 796 y sin dicha información (celda/VFC de tipo NODATA) es 3 249 980.

En el enfoque ráster, la presencia de celdas tipo NODATA tiene una gran influencia sobre el tiempo total de computación. Para evaluar la importancia de dicha influencia, se han implementado dos MDE. En el primer MDE —denominado *Modelo con NODATA*—, el número de VFC susceptible de ser "mojado" por el agua es de 717 796, el 18.1% del total de celdas del MDE (figura 4). En el segundo MDE —denominado *Modelo sin NODATA*—, dicho número pasa a ser de 3 967 776, el 100% de las celdas, porque se ha substituido el valor NODATA de la celda por una cota arbitraria suficientemente alta de 600 m como para no dejarse "mojar" por el agua (figura 4). De esta forma, los resultados hidráulicos son equivalentes.

El tiempo que tarda una computadora en resolver un problema se denomina tiempo de computación. En el enfoque ráster, este tiempo se reparte entre el tiempo de escaneo (se entiende por escaneo el paso por todos los VFC en cada instante de tiempo, para ver si existe información de cota, es decir, se trata del periodo de tiempo utilizado para ver si cada VFC es de tipo NODATA o no; hay que notar que cuantificar este tiempo resulta complicado y que en el enfoque vectorial, este tiempo no existe, dado que todos los elementos, si existen, tienen información geográfica) y el tiempo de cálculo (tiempo utilizado para la actualización de las variables hidráulicas, según la estructura recursiva (12)).

El número de celdas tipo NODATA presentes en un MDE tiene suma importancia, porque el tiempo de escaneo se alarga de manera enorme (más que de forma proporcional) y, en consecuencia, el tiempo de computación. Dado que el flujo de agua nunca sale del cauce con

información de cota, el tiempo de cálculo en ambos modelos es exactamente el mismo.

Por otro lado, si se usa alguna estrategia de paralelización en el código de programación, el número de celdas tipo NODATA presentes en el MDE no tiene por qué afectar de forma tan fuerte al tiempo de computación, porque el tiempo de avance depende del VFC, que requiere mayores cálculos matemáticos; es decir, aquel con agua que tiene los cuatro volúmenes del contorno lleno de agua.

El ensayo consistió en calcular el tiempo de computación necesitado para la computación de 8 h de simulación, con la entrada de un caudal constante de 1 700 m<sup>3</sup>/s desde la sección de aguas arriba del río. El coeficiente de rugosidad de Manning fue establecido en 0.035 para todos los VFC.

Las condiciones iniciales de la sección de aguas arriba del tramo estudiado han sido

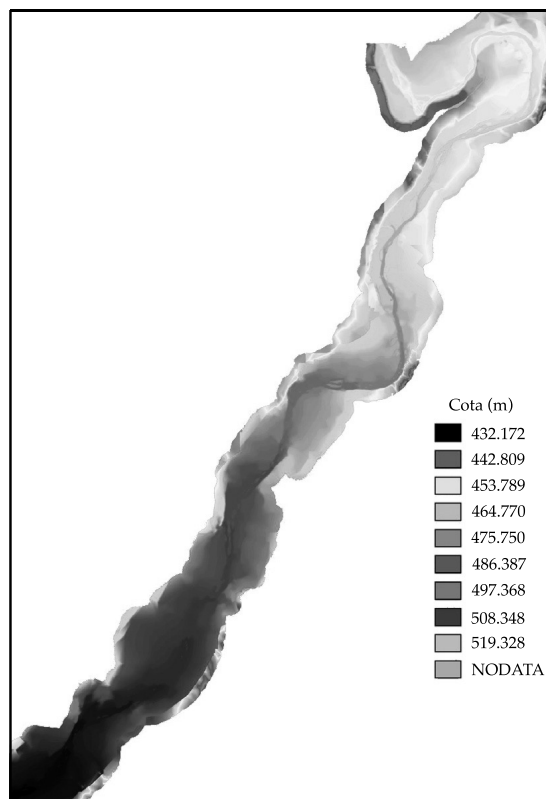


Figura 4. Modelo digital de elevación de 20 km del río Tajo, España, que ha servido de base para el modelo hidráulico.

impuestas en régimen rápido, para poder asegurar la entrada de caudal propuesto. En concreto, la velocidad en el eje de las ordenadas se corresponde al doble de la celeridad en cada punto (figura 5).

El resultado final del modelo hidráulico que se obtiene al cabo de 8 h se muestra en la figura 6, donde puede verse que el agua no ha llegado hasta el final del tramo de estudio.

Aunque los resultados del modelo hidráulico, como los mostrados en la figura 6, son muy interesantes, el objetivo principal de este trabajo es el de presentar el enfoque ráster y también demostrar su mayor eficiencia de cálculo, comparado con el enfoque vectorial. Por lo tanto, la comparativa en cuanto a tiempos de computación es el resultado más importante.

La comparativa sobre tiempo de computación entre el enfoque vectorial y el enfoque ráster se ha llevado a cabo resolviendo el mismo problema con tres programas de cálculo diferentes, codificados en dos lenguajes de programación, en dos sistemas operativos y en dos diferentes ordenadores. Las tres combinaciones de *hardware/software* fueron las siguientes:

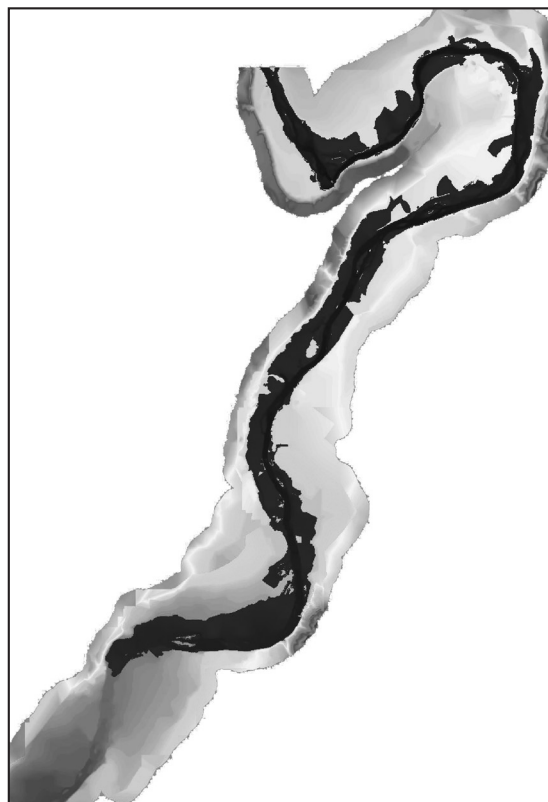


Figura 6. Sobre el MDE de fondo, estado de la lámina en el instante 28 800 s (8 h) de iniciada la simulación.

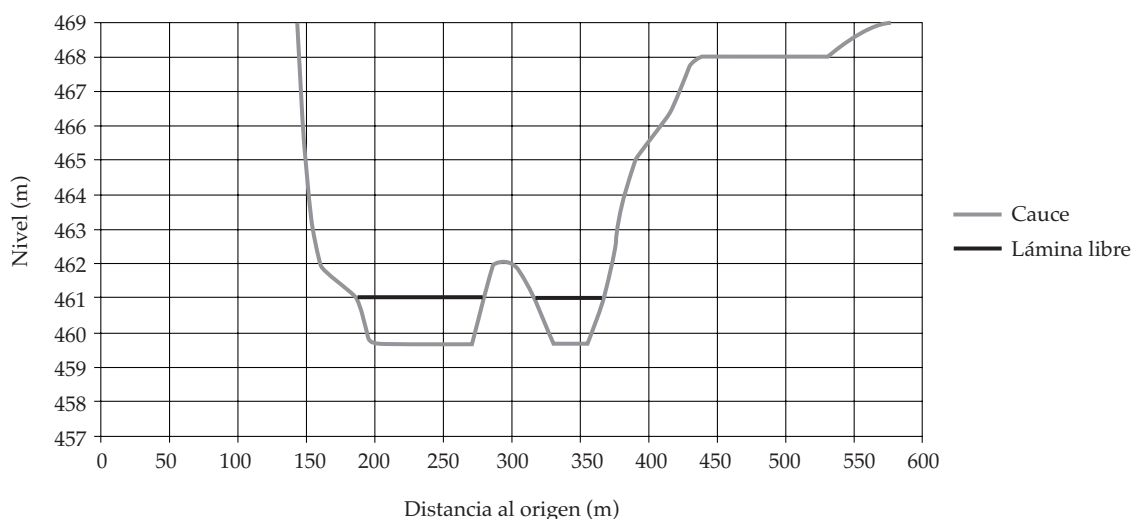


Figura 5. Condiciones iniciales y de contorno constantes en la sección de aguas arriba del tramo de río analizado.

1. La combinación 1 consistió en la computación, con el programa *IBER*, que dispone de un motor de cálculo escrito en código *Fortran* y que trabaja sin paralelización. Dicho programa resuelve el problema del flujo en lámina libre en 2D, según el enfoque vectorial y por lo tanto está adaptado a cualquier tipo de malla, bien sea estructurada o no estructurada. Para el caso de estudio en cuestión, se ha implementado una malla estructurada, en que cada celda del MDE se corresponde con el consiguiente VFC. Así, el modelo implementado tiene tantos VFC como celdas tipo con información de cota. El caso es que el programa desconoce que la malla es estructurada, de manera que debe consultar la base de datos de la topología para todos los VFC a cada paso de tiempo de integración. Como ya se ha dicho anteriormente, esta estrategia hace lento el proceso de cálculo. El ensayo se ha hecho en un ordenador de 64 bits de última generación, que dispone de un CPU modelo Intel core (TM) i5 CPU 750 2.8 GHz y de una memoria RAM de 12 GB.
  2. La combinación 2 consistió en la utilización de otro programa también escrito en código *Fortran* y sin paralelización. Este programa resuelve el problema del flujo en lámina libre en 2D, según el enfoque ráster, y por lo tanto, sólo resuelve los problemas con malla estructurada y homogénea, siguiendo la filosofía *Do one thing and do it well*, de acuerdo con la información original del MDE sin interpolación. Esta combinación ha sido implementada en el mismo ordenador en que lo ha sido la combinación 1.
  3. La combinación 3 consistió en el uso de un tercer programa escrito en código *C-CUDA* —extensión del lenguaje C para programación, en paralelo de la GPU de las placas gráficas del tipo NVIDIA— (Sanders y Kandrot, 2010). La paralelización consistió solamente en lanzar un *thread* de actualización temporal de las variables hidrodinámicas para cada VFC. En este caso, el tiempo de escaneo resulta irrelevante, porque todos los *thread* lanzados empiezan por preguntar si el VFC es de tipo NODATA, con lo que el porcentaje de VFC tipo NODATA presente en un problema no afecta de manera proporcional al tiempo de escaneo. El ensayo se ha hecho en un ordenador diferente, también de 64 bits de última generación, que dispone de una CPU modelo Intel (R) Core (TM) i7 CPU 950 @ 3.07 GHz y de una memoria RAM de 11.8 GB. La placa gráfica utilizada fue la Geforce GTX 580 de NVIDIA.
- Las tres combinaciones de *hardware / software* han dado los resultados que se presentan en el cuadro 1 en cuanto a tiempo de resolución.
- A la vista de los resultados mostrados en el cuadro 1, caben destacar los siguientes puntos:
- La combinación 1, trabajando con el modelo sin NODATA, no dispone de su correspondiente resultado. Ello se debe a que la experiencia indica que el enfoque vectorial con más de tres millones de volúmenes finitos con un programa sin paralelización resulta inviable desde el punto de vista operativo, por consumir demasiado tiempo de computación y, por consiguiente, no se ha realizado este ensayo numérico.

Cuadro 1. Tiempos de computación usados en los cinco ensayos numéricos realizados.

|               | Modelo con NODATA (minutos) | Modelo sin NODATA (minutos) |
|---------------|-----------------------------|-----------------------------|
| Combinación 1 | 1 035                       | -                           |
| Combinación 2 | 106                         | 402                         |
| Combinación 3 | 85                          | 158                         |

- Observando los resultados de las tres combinaciones cuando se resuelve el modelo con NODATA, puede verse la mejora sustancial que supone el enfoque ráster frente al enfoque vectorial, viéndose reducido el tiempo de computación en 9.76 veces con la combinación 2 y en 12.18 veces con la combinación 3.
- Del análisis de los mismos resultados analizados en el punto anterior, sorprende la poca diferencia de tiempos existente entre las combinaciones 2 y 3. Ello significa que el tiempo de CPU requerido para el escaneo y cálculo lineal de los 700 000 VFC es del mismo orden de magnitud que el tiempo de GPU requerido por el cálculo lineal del *thread* más lento (VFC con agua y con los cuatro del contorno también "mojados") de todos los calculados en paralelo.
- La paralelización del problema planteado como enfoque ráster es el que presenta una mayor rapidez de cálculo de todas las posibles combinaciones y además es la estrategia que mejor soporta la reducción de VFC de tipo NODATA en el MDE, como puede verse al comparar los valores de la última fila del cuadro.

## Conclusiones

Se enumeran las conclusiones del trabajo:

- Se estableció una clasificación de los problemas de flujo en lámina libre en dos dimensiones de acuerdo con el formato de la información disponible y requerida de los sistemas de información geográfica (SIG): enfoque vectorial y enfoque ráster.
- Se presentó el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas de Saint-Venant en dos dimensiones y se describió el método de resolución utilizado, que se basa en el esquema explícito de primer orden en volúmenes finitos de Godunov con el *Riemann solver* de Roe y con el tratamiento del término independiente propuesto por Vázquez-Cendón. Dado que dicho

esquema sirve tanto para problemas con malla estructurada o no, el problema puede considerarse dentro del enfoque vectorial.

- Se establece una adaptación del método propuesto en el punto anterior a problemas que se describen con una malla estructurada y homogénea de cuadriláteros que hace equivaler —directamente y sin interpolaciones— cada celda del MDE con el correspondiente volumen finito cuadrangular (VFC). Las dimensiones del VFC serán las de la celda de base del MDE. Por lo tanto, el algoritmo puede considerarse dentro del enfoque ráster.
- En el enfoque ráster, el hecho de que a cada instante de tiempo de integración no sea necesaria la consulta de la base de datos de la topología de la malla por ser conocida de antemano —precisamente porque se trata de una malla estructurada y homogénea—, hace que el proceso numérico mejore de forma enorme su eficiencia de cálculo tanto por requerir menor tiempo de computación como menor memoria RAM de almacenamiento de la geometría.
- La sencillez de planteamiento del enfoque ráster se mantiene también en el establecimiento de las condiciones de contorno. Se proponen dos tipos condiciones de contorno por defecto: pared material sin flujo para los VFC tipo NODATA —celdas sin información de cota— y salida libre de agua —para el contorno de la serie cartográfica del MDE—.
- El enfoque ráster reduce en gran medida el tiempo de computación respecto del enfoque vectorial. En el caso ilustrativo en que no se utiliza la estrategia de paralelización, se necesitó 9.76 veces menos de tiempo y cuando se utilizó paralelización, 12.18.
- La mejor estrategia de implementación de un programa de resolución del flujo en lámina libre en 2D en cuanto al tiempo de computación es el enfoque ráster con paralelización, porque, por un lado, puede

escribirse el código con cierta facilidad y sencillez, y por el otro, porque es la estrategia que mejor soporta el incremento de las dimensiones del problema.

## Apéndice de expresiones algebraicas

En este apéndice se muestra la particularización de las expresiones (5) a (9) —del denominado enfoque vectorial— al caso de implementación del enfoque ráster, objeto del presente trabajo. Por particularización se entiende la sustitución y simplificación de dichas expresiones, tomando  $N_I = 4$  los siguientes valores:

$$\begin{aligned} l_n &= \Delta x & l_e &= \Delta y \\ \mathbf{n}_n &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{n}_e &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ l_s &= \Delta x & l_o &= \Delta y \\ \mathbf{n}_s &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \mathbf{n}_o &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las expresiones algebraicas que se presentan aquí están ordenadas para facilitar su implementación en un programa de naturaleza lineal, es decir un *thread*. En caso de paralelización del problema, donde se envía cada VFC como *thread* diferente, las expresiones se calculan de esta forma secuencial. El orden de las expresiones se ha hecho mediante una distribución en matriz de  $2 \times 2$ , una casilla para cada uno de los cuatro lados del VFC.

### Variables interpoladas en los lados del VFC

$$\left. \begin{aligned} c_n &= \sqrt{g \left( \frac{h_N + h_I}{2} \right)} \\ u_n &= \frac{u_N c_N + u_I c_I}{c_N + c_I} \\ v_n &= \frac{v_N c_N + v_I c_I}{c_N + c_I} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} c_e &= \sqrt{g \left( \frac{h_E + h_I}{2} \right)} \\ u_e &= \frac{u_E c_E + u_I c_I}{c_E + c_I} \\ v_e &= \frac{v_E c_E + v_I c_I}{c_E + c_I} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} c_s &= \sqrt{g \left( \frac{h_S + h_I}{2} \right)} \\ u_s &= \frac{u_S c_S + u_I c_I}{c_S + c_I} \\ v_s &= \frac{v_S c_S + v_I c_I}{c_S + c_I} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} c_o &= \sqrt{g \left( \frac{h_O + h_I}{2} \right)} \\ u_o &= \frac{u_O c_O + u_I c_I}{c_O + c_I} \\ v_o &= \frac{v_O c_O + v_I c_I}{c_O + c_I} \end{aligned} \right\}$$

### Vectores propios

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1n} &= \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n + c_n \end{pmatrix}; \mathbf{e}_{2n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_n \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_{3n} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n - c_n \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_{1e} &= \begin{pmatrix} 1 \\ u_e + c_e \\ v_e \end{pmatrix}; \mathbf{e}_{2e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_e \end{pmatrix}; \mathbf{e}_{3e} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_e - c_e \\ v_e \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_{1s} &= \begin{pmatrix} 1 \\ u_s \\ v_s - c_s \end{pmatrix}; \mathbf{e}_{2s} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_s \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_{3s} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_s \\ v_s + c_s \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_{1o} &= \begin{pmatrix} 1 \\ u_o - c_o \\ v_o \end{pmatrix}; \mathbf{e}_{2o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_o \end{pmatrix}; \mathbf{e}_{3o} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_o + c_o \\ v_o \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Valores propios

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1n} &= v_n + c_n \\ \lambda_{2n} &= v_n \\ \lambda_{3n} &= v_n - c_n \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \lambda_{1e} &= u_e + c_e \\ \lambda_{2e} &= u_e \\ \lambda_{3e} &= u_e - c_e \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} \lambda_{1s} &= -v_s + c_s \\ \lambda_{2s} &= -v_s \\ \lambda_{3s} &= -v_s - c_s \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \lambda_{1o} &= -u_o + c_o \\ \lambda_{2o} &= -u_o \\ \lambda_{3o} &= -u_o - c_o \end{aligned} \right\}$$

### Factores alfa

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1n} &= \frac{h_N - h_I}{2} + \frac{1}{2c_n} [h_N v_N - h_I v_I - v_n (h_N - h_I)] \\ \alpha_{2n} &= -\frac{1}{c_n} [h_N u_N - h_I u_I - u_n (h_N - h_I)] \\ \alpha_{3n} &= \frac{h_N - h_I}{2} - \frac{1}{2c_n} [h_N v_N - h_I v_I - v_n (h_N - h_I)] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1e} &= \frac{h_E - h_I}{2} + \frac{1}{2c_e} [h_E u_E - h_I u_I - u_e (h_E - h_I)] \\ \alpha_{2e} &= \frac{1}{c_e} [h_E v_E - h_I v_I - v_e (h_E - h_I)] \\ \alpha_{3e} &= \frac{h_E - h_I}{2} - \frac{1}{2c_e} [h_E u_E - h_I u_I - u_e (h_E - h_I)] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1s} &= \frac{h_S - h_I}{2} + \frac{1}{2c_s} [h_S v_S - h_I v_I - v_s (h_S - h_I)] \\ \alpha_{2s} &= \frac{1}{c_s} [h_S u_S - h_I u_I - u_s (h_S - h_I)] \\ \alpha_{3s} &= \frac{h_S - h_I}{2} + \frac{1}{2c_s} [h_S v_S - h_I v_I - v_s (h_S - h_I)] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1o} &= \frac{h_O - h_I}{2} - \frac{1}{2c_o} [h_O u_O - h_I u_I - u_o (h_O - h_I)] \\ \alpha_{2o} &= -\frac{1}{c_o} [h_O v_O - h_I v_I - v_o (h_O - h_I)] \\ \alpha_{3o} &= \frac{h_O - h_I}{2} + \frac{1}{2c_o} [h_O u_O - h_I u_I - u_o (h_O - h_I)] \end{aligned} \right\}$$

### Factores beta

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1n} &= -0.5c_n (z_N - z_I) \\ \beta_{2n} &= 0 \\ \beta_{3n} &= 0.5c_n (z_N - z_I) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \beta_{1e} &= -0.5c_e (z_E - z_I) \\ \beta_{2e} &= 0 \\ \beta_{3e} &= 0.5c_e (z_E - z_I) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1s} &= -0.5c_s (z_S - z_I) \\ \beta_{2s} &= 0 \\ \beta_{3s} &= 0.5c_s (z_S - z_I) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \beta_{1o} &= -0.5c_o (z_O - z_I) \\ \beta_{2o} &= 0 \\ \beta_{3o} &= 0.5c_o (z_O - z_I) \end{aligned} \right\}$$

### Factores épsilon

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1n} &= \max [0, \lambda_{1n} - \lambda_I, \lambda_N - \lambda_{1n}] \\ \varepsilon_{2n} &= \max [0, \lambda_{2n} - \lambda_I, \lambda_N - \lambda_{2n}] \\ \varepsilon_{3n} &= \max [0, \lambda_{3n} - \lambda_I, \lambda_N - \lambda_{3n}] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1e} &= \max [0, \lambda_{1e} - \lambda_I, \lambda_E - \lambda_{1e}] \\ \varepsilon_{2e} &= \max [0, \lambda_{2e} - \lambda_I, \lambda_E - \lambda_{2e}] \\ \varepsilon_{3e} &= \max [0, \lambda_{3e} - \lambda_I, \lambda_E - \lambda_{3e}] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1s} &= \max [0, \lambda_{1s} - \lambda_I, \lambda_S - \lambda_{1s}] \\ \varepsilon_{2s} &= \max [0, \lambda_{2s} - \lambda_I, \lambda_S - \lambda_{2s}] \\ \varepsilon_{3s} &= \max [0, \lambda_{3s} - \lambda_I, \lambda_S - \lambda_{3s}] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1o} &= \max [0, \lambda_{1o} - \lambda_I, \lambda_O - \lambda_{1o}] \\ \varepsilon_{2o} &= \max [0, \lambda_{2o} - \lambda_I, \lambda_O - \lambda_{2o}] \\ \varepsilon_{3o} &= \max [0, \lambda_{3o} - \lambda_I, \lambda_O - \lambda_{3o}] \end{aligned} \right\}$$

### Factores fi

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1n} &= \begin{cases} |\lambda_{1n}| & \text{si } |\lambda_{1n}| \geq \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{1n} & \text{si } |\lambda_{1n}| < \varepsilon_{1n} \end{cases} \\ \varphi_{2n} &= \begin{cases} |\lambda_{2n}| & \text{si } |\lambda_{2n}| \geq \varepsilon_{2n} \\ \varepsilon_{2n} & \text{si } |\lambda_{2n}| < \varepsilon_{2n} \end{cases} \\ \varphi_{3n} &= \begin{cases} |\lambda_{3n}| & \text{si } |\lambda_{3n}| \geq \varepsilon_{3n} \\ \varepsilon_{3n} & \text{si } |\lambda_{3n}| < \varepsilon_{3n} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \varphi_{1e} &= \begin{cases} |\lambda_{1e}| & \text{si } |\lambda_{1e}| \geq \varepsilon_{1e} \\ \varepsilon_{1e} & \text{si } |\lambda_{1e}| < \varepsilon_{1e} \end{cases} \\ \varphi_{2e} &= \begin{cases} |\lambda_{2e}| & \text{si } |\lambda_{2e}| \geq \varepsilon_{2e} \\ \varepsilon_{2e} & \text{si } |\lambda_{2e}| < \varepsilon_{2e} \end{cases} \\ \varphi_{3e} &= \begin{cases} |\lambda_{3e}| & \text{si } |\lambda_{3e}| \geq \varepsilon_{3e} \\ \varepsilon_{3e} & \text{si } |\lambda_{3e}| < \varepsilon_{3e} \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1s} &= \begin{cases} |\lambda_{1s}| & \text{si } |\lambda_{1s}| \geq \varepsilon_{1s} \\ \varepsilon_{1s} & \text{si } |\lambda_{1s}| < \varepsilon_{1s} \end{cases} \\ \varphi_{2s} &= \begin{cases} |\lambda_{2s}| & \text{si } |\lambda_{2s}| \geq \varepsilon_{2s} \\ \varepsilon_{2s} & \text{si } |\lambda_{2s}| < \varepsilon_{2s} \end{cases} \\ \varphi_{3s} &= \begin{cases} |\lambda_{3s}| & \text{si } |\lambda_{3s}| \geq \varepsilon_{3s} \\ \varepsilon_{3s} & \text{si } |\lambda_{3s}| < \varepsilon_{3s} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \varphi_{1o} &= \begin{cases} |\lambda_{1o}| & \text{si } |\lambda_{1o}| \geq \varepsilon_{1o} \\ \varepsilon_{1o} & \text{si } |\lambda_{1o}| < \varepsilon_{1o} \end{cases} \\ \varphi_{2o} &= \begin{cases} |\lambda_{2o}| & \text{si } |\lambda_{2o}| \geq \varepsilon_{2o} \\ \varepsilon_{2o} & \text{si } |\lambda_{2o}| < \varepsilon_{2o} \end{cases} \\ \varphi_{3o} &= \begin{cases} |\lambda_{3o}| & \text{si } |\lambda_{3o}| \geq \varepsilon_{3o} \\ \varepsilon_{3o} & \text{si } |\lambda_{3o}| < \varepsilon_{3o} \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

## Factores gamma

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1n} &= \alpha_{1n}\varphi_{1n} + (1 - \text{signo}(\lambda_{1n}))\beta_{1n} \\ \gamma_{2n} &= \alpha_{2n}\varphi_{2n} + (1 - \text{signo}(\lambda_{2n}))\beta_{2n} \\ \gamma_{3n} &= \alpha_{3n}\varphi_{3n} + (1 - \text{signo}(\lambda_{3n}))\beta_{3n} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1e} &= \alpha_{1e}\varphi_{1e} + (1 - \text{signo}(\lambda_{1e}))\beta_{1e} \\ \gamma_{2e} &= \alpha_{2e}\varphi_{2e} + (1 - \text{signo}(\lambda_{2e}))\beta_{2e} \\ \gamma_{3e} &= \alpha_{3e}\varphi_{3e} + (1 - \text{signo}(\lambda_{3e}))\beta_{3e} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1s} &= \alpha_{1s}\varphi_{1s} + (1 - \text{signo}(\lambda_{1s}))\beta_{1s} \\ \gamma_{2s} &= \alpha_{2s}\varphi_{2s} + (1 - \text{signo}(\lambda_{2s}))\beta_{2s} \\ \gamma_{3s} &= \alpha_{3s}\varphi_{3s} + (1 - \text{signo}(\lambda_{3s}))\beta_{3s} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1o} &= \alpha_{1o}\varphi_{1o} + (1 - \text{signo}(\lambda_{1o}))\beta_{1o} \\ \gamma_{2o} &= \alpha_{2o}\varphi_{2o} + (1 - \text{signo}(\lambda_{2o}))\beta_{2o} \\ \gamma_{3o} &= \alpha_{3o}\varphi_{3o} + (1 - \text{signo}(\lambda_{3o}))\beta_{3o} \end{aligned} \right\}$$

Recibido: 06/08/2011

Aceptado: 12/11/2012

## Referencias

- BLADÉ, E. y GÓMEZ, M. *Modelación del flujo en lámina libre sobre cauces naturales. Análisis integrado en una y dos dimensiones*. Monografía CIMNE # 97. Barcelona: CIMEN, 2006.
- ROE, P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*. Vol. 43, 1981, pp. 357-372.
- SANDERS, J. and KANDROT, E. *CUDA by example. An introduction to General-Purpose GPU Programming*. New York: Adison-Wesley, 2010.
- TORO, E.F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2009.
- VÁZQUEZ-CENDÓN, M.E. Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow waters equations in channels with irregular geometry. *Journal of Computational Physics*. Vol. 148, 1999, pp. 497-526.

## Abstract

SOLER-GUITART, J., BLADÉ, E., BOFILL-ABELLÓ, J. & GAMAZO, P. "Raster approach" to the hydrodynamic problem of 2D free surface flow. *Water Technology and Sciences* (in Spanish). Vol. IV, No. 4, September-October, 2013, pp. 77-92.

Geographical information systems traditionally provide information using two formats—raster and vector. Each one of these formats is handled according to their independent algorithms. Consequently, any type of hydraulic study performed in a territory contains information that can be classified by these two formats. LiDAR is the most precise technology used to generate Digital Elevation Models (DEM) for large areas, with a spatial resolution of 1 to 2 m and a minimum precision in height. It gives the cartographic information its raster characteristic, with the cell as its basic unit of information. Consequently, this kind of information is very suitable to the generation of structured quadrilateral meshes to numerically model free surface flow in two dimensions. The main objective of this work was to present an adaptation of the classic explicit first order finite volumes scheme to a finite square volumes (FSV) mesh which, directly and without interpolations, makes each cell in the DEM (or raster) equal to the corresponding FSV. Consequently, the dimensions of the FSV are those of the base DEM cell. This is presented herein as a raster approach to the hydrodynamic problem of free surface flow in two dimensions. With the raster approach, the database for the mesh topology does not need to be consulted for each instant of time and, therefore, the efficiency of the numeric process is greatly improved. Consequently, larger-sized problems can be addressed. An additional objective was to compare both approaches by solving an illustrative example.

**Keywords:** two-dimensional modelling, shallow water, parallelization, finite volumes.

## Dirección institucional de los autores

*Dr. Joan Soler Guitart*

Control, Dynamics and Applications. CoDALab  
Departamento de Matemática Aplicada III  
Universidad Politécnica de Catalunya  
c/Compte d'Urgell, 187  
08036 Barcelona, ESPAÑA  
Teléfono: +34 (93) 4016 909  
joan.soler@upc.edu

*Dr. Ernest Bladé Castellet*

Instituto mixto de investigación FLUMEN  
Departamento de Ingeniería Hidráulica, Marítima y  
Ambiental  
Universidad Politécnica de Catalunya  
c/Jordi Girona, 1-3  
08034 Barcelona, ESPAÑA  
Teléfono: +34 (93) 4017 070  
ernest.blade@upc.edu

*Ing. Jordi Bofill Abelló*

Cátedra de software libre  
Universidad Politécnica de Catalunya  
Avenida de les Bases de Manresa, 61-73  
08240 Manresa, ESPAÑA  
Teléfono: +34 (93) 8777 317  
jordi.bofill@upc.edu

*Dr. Pablo Gamazo*

Ingeniero Civil, Doctor en Hidrología Subterránea  
Departamento del Agua, Regional Norte  
Universidad de la República  
Gral. Rivera 1350  
50000 Salto, URUGUAY  
Teléfono: +59 (84) 7322 154, int. 105  
pablogamazo@gmail.com