

Método de las características en problemas de frontera variable

José Luis Sánchez Bribiesca
Rafael Carmona Paredes
y Lidia Carmona Paredes¹

Instituto de Ingeniería, UNAM

En este trabajo se parte de las generalidades tradicionales del método de las características empleado para calcular los golpes de ariete en conducciones con llenado total, a fin de aplicarlo en el caso simple de una tubería horizontal, mediante un algoritmo que permite cambiar la frontera final, simulando el movimiento de la interfase que marca el límite de aplicación de dicho método.

Los criterios existentes para calcular tanto la avenida producida por la ruptura de una presa como por la de la columna líquida en una tubería, varían desde los muy complejos y de manejo difícil (Chaudry, 1979) hasta los poco confiables y en extremo burdos (Sharp, 1981). Sin embargo, para el caso de la tubería se cuenta con el método de las características que, aunque arroja resultados aproximados, es fácil de aplicar y proporciona una primera idea de los efectos producidos por el fenómeno mencionado.

En este método —al igual que para el caso de la presa— se establece un criterio para calcular el desplazamiento de las fronteras en determinadas etapas del fenómeno y su aplicación se circunscribe al caso más simple, el de una tubería horizontal cuyo extremo terminal puede cerrarse bruscamente por medio de una compuerta.

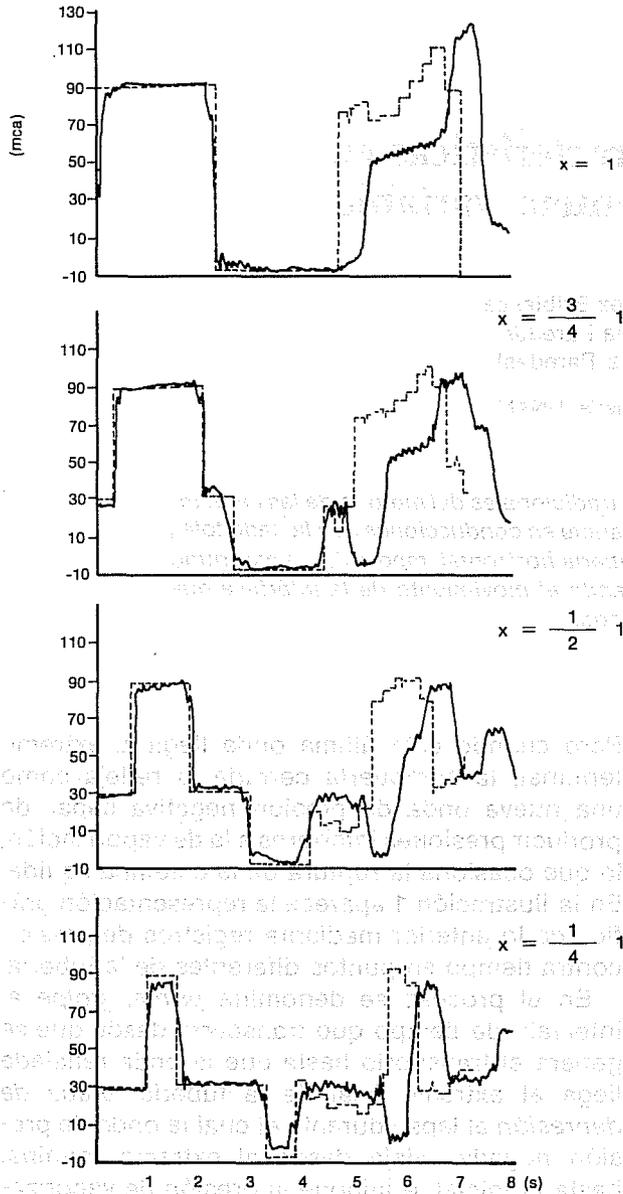
Una valiosa ayuda para desarrollar la propuesta es el artículo de Martín (1983) que contiene los resultados experimentales obtenidos al cerrar de improviso la compuerta del extremo terminal de una tubería de 102 m de longitud por 13.41 mm de diámetro. Con ello, se genera una onda de presión positiva que viaja en sentido aguas arriba hasta alcanzar el extremo inicial, desde donde un tanque a presión constante la refleja con una presión negativa y viaja hacia el extremo terminal, restituyendo la presión de operación establecida en cada punto de la tubería.

Pero cuando esta última onda llega al extremo terminal, la compuerta cerrada la refleja como una nueva onda de presión negativa capaz de producir presiones inferiores a la de vaporización, lo que ocasiona la ruptura de la columna líquida. En la ilustración 1 aparece la representación gráfica de lo anterior mediante registros de presión contra tiempo en puntos diferentes de la tubería.

En el proceso se denomina *primer golpe* al intervalo de tiempo que transcurre desde que se genera el transitorio hasta que la onda reflejada llega al extremo final de la tubería; *etapa de depresión* al lapso durante el cual la onda de presión negativa viaja desde el extremo terminal hasta el inicial, e impone la presión de vaporización a lo largo de toda la tubería; *etapa de restitución* al intervalo del viaje de una onda de presión positiva, desde el extremo inicial hasta el opuesto, lo que restituye presiones superiores a la de vaporización en todos los puntos del sistema, y *segundo golpe* al proceso iniciado cuando la onda de presión positiva de la restitución alcanza el extremo terminal y se refleja en la compuerta completamente cerrada como una nueva onda de presión positiva, que viaja hacia el extremo contrario.

Los coeficientes y los criterios de cálculo aquí descritos se comprobaron y corrigieron de acuerdo con los resultados obtenidos con el dispositivo experimental que se encuentra instalado

1. Separación de columna intermedia (J = 1.578)



Hipótesis

Como se verá después, el golpe de ariete origina tres tipos de efectos: cuando $J < 1.25$, no se produce la ruptura de columna o los efectos causados son tan pequeños que se pueden abordar con los procedimientos tradicionales. Cuando las relaciones de Jukovski están comprendidas entre 1.25 y 2.75, ocurre una ruptura de columna de valor intermedio, en cuyo caso se supone que no pueden producirse presiones inferiores a h_v ; la forma en que éstas se propagan se calcula por interpolación, en los términos descritos más adelante, tanto en la etapa de depresión (cuando se alcanza la presión de vaporización en todos los puntos del sistema), como en la fase de restitución (cuando el líquido vuelve a adquirir presiones superiores a la de vaporización). La fase del primer golpe, antes de que se produzca la depresión, se calcula con los procedimientos tradicionales, en tanto que la etapa del segundo, posterior a las etapas de depresión y restitución, se obtiene introduciendo algunas modificaciones en el criterio clásico que simulan el efecto de las burbujas, como aquí se describe. Hay que manejar el supuesto de que la celeridad con que avanzan tanto el frente de depresión como el de restitución es igual a la de las fases del primero y segundo golpes. Conviene señalar que, de acuerdo con los ensayos de Martin, esta ruptura de valor intermedio es la más interesante, puesto que su característica sobresaliente es que en la etapa del segundo golpe se producen sobrepresiones mayores que las alcanzadas en la fase del primero.

Por último, en las relaciones de Jukovski superiores a 2.75, ocurre la ruptura severa de columna y la fase de depresión empieza a prolongarse; sin embargo, en la etapa del segundo golpe las sobrepresiones son inferiores a las que se alcanzan en el primero. Como se verá más adelante, el método propuesto sólo brinda una idea aproximada del fenómeno cuando ocurre este tipo de ruptura, pero esto no tiene gran importancia por la magnitud de las sobrepresiones producidas durante los dos golpes.

Formulario

En la ilustración 2a se muestra una tubería de longitud l , diámetro d , coeficiente de Darcy y velocidad inicial v_0 . La pérdida de carga entre el origen (de carga h_0) y la salida (de carga h_1) está dada por la ecuación:

en el Instituto de Ingeniería de la UNAM. Los distintos casos estudiados se identificaron a partir de un parámetro adimensional de referencia constituido por la relación de Jukovski:

$$J = \frac{cv_0}{g(h_v + h_0)} \quad (1)$$

En esta expresión, c es la celeridad; v_0 , la velocidad inicial en la tubería; g , la aceleración de la gravedad; h_0 , la carga en la sección inicial y h_v la presión de vapor.

$$h_o - h_t = \frac{\lambda}{D} \ell \frac{v_o^2}{2g} \quad (2)$$

En dicha tubería:

$$f = \frac{\lambda}{2D} \quad (3)$$

$$F = f \Delta t \quad (3')$$

donde Δt es el intervalo de tiempo que requiere una onda de celeridad c para viajar entre dos secciones de la tubería.

En la ilustración 2b se muestra el plano de las características asociado a la tubería de la ilustración anterior y en él se indica la nomenclatura para designar los puntos de cálculo que se supone *avanzan* hacia abajo.

Como se sabe, las ecuaciones del método de las características son:

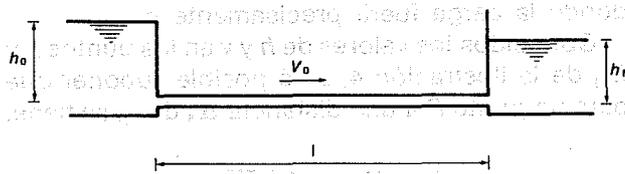
$$\frac{g}{c}(h_S - h_P) + v_S - v_P + F|v_P|v_P = 0 \quad (4)$$

$$-\frac{g}{c}(h_S - h_Q) + v_S - v_Q + F|v_Q|v_Q = 0 \quad (5)$$

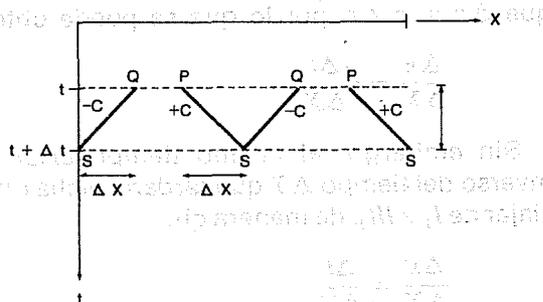
Así, puesto que en la frontera izquierda $h_s = h_o$, a partir de la última ecuación se obtiene:

$$v_S = v_Q + \frac{g}{c}(h_o - h_Q) - F|v_Q|v_Q \quad (6)$$

2a. Línea de conducción



2b. Plano de las características



Para los puntos intermedios, la eliminación de h_s mediante la aplicación de (4) y (5) conduce a:

$$v_S = \frac{1}{2} [v_P - v_Q + \frac{g}{c}(h_P - h_Q) - F|v_P|v_P - F|v_Q|v_Q]$$

y al conocer este valor, de (4) se obtiene:

$$h_S = h_P + \frac{c}{g}(v_P - v_S - F|v_P|v_P) \quad (8)$$

Finalmente, para la frontera derecha $v_s = 0$, por lo que de (4) se tiene también que:

$$h_S = h_P + \frac{c}{g}(v_P - F|v_P|v_P) \quad (9)$$

Por otra parte, si se designan como h_s y h_z , respectivamente, las cargas anteriores y posteriores a una compuerta que obtura una tubería de sección a_o hasta dejar un área a , y se supone que la velocidad en el tubo es v_s , podrá establecerse que:

$$h_S - h_Z = (a_o/a - 1)^2 \frac{v_S^2}{2g} = A \frac{v_S^2}{2g} \quad (10)$$

Cuando empieza a producirse la restitución de la columna líquida puede suponerse que $h_z = \bar{h}_z = h_v$ es la carga aguas abajo de una compuerta imaginaria que permite representar las pérdidas de energía conforme avanza la columna, así como las ondas reflejadas por la presencia de las burbujas. De esta manera, la combinación de las ecuaciones (4) y (10) conduce a:

$$v_S^2 + \frac{2c}{A}v_S + \frac{2}{A}[g(\bar{h}_z - h_P) + c(F|v_P|v_P - v_P)] = 0 \quad (11)$$

Esta ecuación permite calcular el valor de la velocidad v_s con la que avanza la columna líquida. A partir de dicho valor, de (10) se concluye que:

$$h_S = \bar{h}_Z + A \frac{v_S^2}{2g} \quad (12)$$

Por otra parte, todo parece indicar que en los primeros instantes de la fase correspondiente al segundo golpe las burbujas no han desaparecido por completo, hecho que se toma en cuenta al utilizar valores más bajos para $A = (a_o/a - 1)^2$. A partir de la combinación de las ecuaciones (4), (5) y (10) se obtiene que:

$$v_s^2 + \frac{4c}{A} v_s + \frac{2g}{A} (h_Q - h_P) + \frac{2c}{A} [-v_P - v_Q + F|v_P|v_P + F|v_Q|v_Q] = 0 \quad (13)$$

Al conocer el valor de v_s , las ecuaciones (4) y (5) permiten obtener:

$$h_s = h_P + \frac{c}{g} [v_P - v_s - F|v_P|v_P] \quad (14)$$

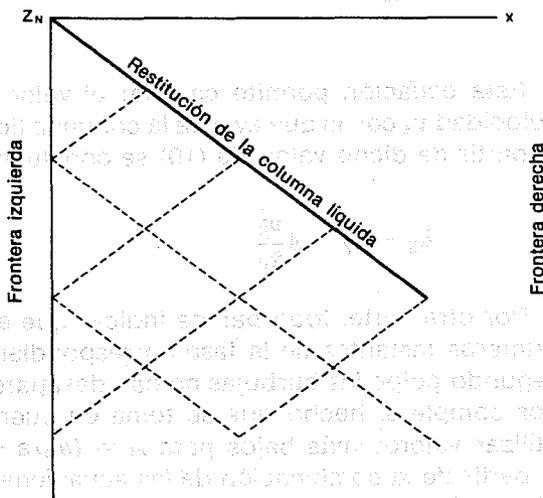
$$h_z = h_Q + \frac{c}{g} [v_s - v_Q + F|v_P|v_P] \quad (15)$$

Más adelante, en la parte de los ejemplos numéricos se comparan los resultados de este modelo al aplicarlo a tres experiencias efectuadas en el laboratorio del Instituto de Ingeniería de la UNAM.

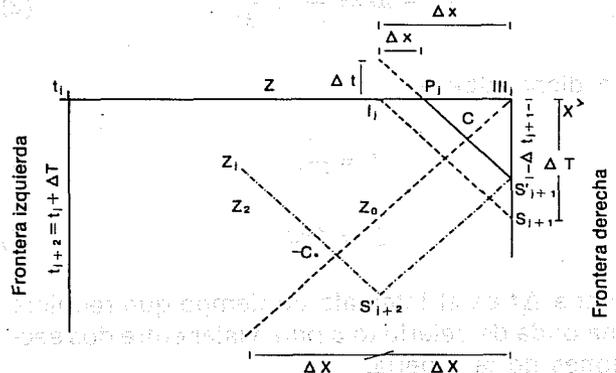
Hay que recordar que en la realidad las burbujas tienen una distribución caótica, de manera que los valores propuestos para A intentan sólo dar una idea del promedio causado por sus efectos durante la fase del segundo golpe. Es necesario destacar la importancia que tienen los valores de h y v en el punto Z_N de la ilustración 3, puesto que de ellos depende el comportamiento del flujo durante la restitución y, por ende, durante la fase del segundo golpe. La determinación de dichos valores depende, a su vez, del comportamiento en la fase de depresión; su cálculo se analiza a continuación.

Supóngase que al aplicar el método tradicional se llegue hasta un instante t_j en el que todas las cargas h_s a lo largo de la tubería son mayores que

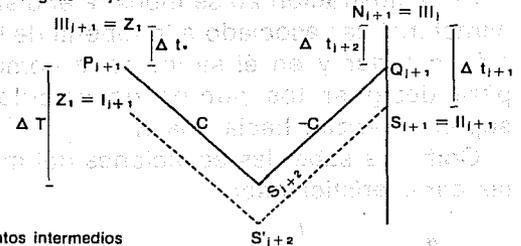
3. Puntos de cálculo en el plano de las características



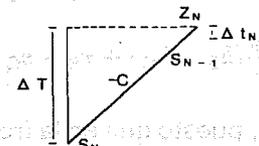
4. Interpolación de los puntos de cálculo en el tiempo



(a) En el extremo aguas abajo



(b) En los puntos intermedios



(c) En el extremo aguas arriba

h_v ; sin embargo, considérese también que al avanzar en la frontera derecha al instante $t_{j+1} = t_j + \Delta T$ se encuentra que en el punto S'_{j+1} de la ilustración 4, la carga h_s resulta menor que h_v ; como esa condición es inadmisibles, el punto S_{j+1} tendría que localizarse sobre la frontera derecha, donde la carga fuera precisamente h_v .

Conocidos los valores de h y v en los puntos I_j y III_j de la ilustración 4, será posible suponer que para un punto P a una distancia Δx de I_j , se tiene:

$$h_P = h_I + (h_{III} - h_I) \frac{\Delta x}{\Delta X} \quad (16)$$

Si se designa con Δt al tiempo que una onda de depresión tarda en viajar de I_j a P_j , se considera que $\Delta x = c \Delta t$, por lo que se puede obtener:

$$\frac{\Delta x}{\Delta X} = c \frac{\Delta t}{\Delta X} \quad (17)$$

Sin embargo, al mismo tiempo $c/\Delta x$ es el inverso del tiempo ΔT que tardaría dicha onda en viajar de I_j a III_j , de manera que

$$\frac{\Delta x}{\Delta X} = \frac{\Delta t}{\Delta T} \quad (18)$$

Al sustituir esta igualdad en la que, define a h_p , se tiene:

$$h_p = h_I + (h_{III} - h_I) \frac{\Delta t}{\Delta T} \quad (19)$$

Si se procede de igual forma y se considera que $v_{III} = 0$ debido a que III_j se encuentra sobre la frontera derecha, se concluye que para la velocidad:

$$v_p = v_I - v_I \frac{\Delta t}{\Delta T} \quad (20)$$

De acuerdo con el razonamiento expuesto, debe tenerse en cuenta que si Δt_{j+1} es el tiempo que toma la onda en viajar de P_j a S_{j+1} , debe cumplirse la relación:

$$\Delta t_{j+1} = \Delta T - \Delta t \quad (21)$$

Ahora bien, según se indicó al establecer las fórmulas (3) y (3'), cuando se utilice (3) para pasar de P_j a S_{j+1} , debe considerarse que el incremento de tiempo es precisamente Δt_{j+1} , por lo que el término de fricción se escribe en este caso:

$$F|v_p|v_p = f|v_p|v_p \Delta t_{j+1} \quad (22)$$

Por otra parte, de acuerdo con (18) puede demostrarse:

$$|v_p| = |v_I| - |v_I| \frac{\Delta t}{\Delta T} \quad (23)$$

En esta forma, al sustituir (21) y (23) en (22), puede escribirse:

$$F|v_p|v_p = f(v_I - v_I \frac{\Delta t}{\Delta T})(|v_I| - |v_I| \frac{\Delta t}{\Delta T})(\Delta T - \Delta t) \quad (24)$$

Si se efectúan las operaciones indicadas en esta última igualdad y se ordena en forma adecuada, se concluye que:

$$F|v_p|v_p = f \left[-\frac{v_I|v_I|}{\Delta T^2} \Delta t^3 + \frac{3v_I|v_I|}{\Delta T} \Delta t^2 - 3|v_I|v_I \Delta t + |v_I|v_I \Delta T \right] \quad (25)$$

En estas condiciones, al sustituir (19), (20) y (25) en (4) y ordenar los términos, se obtiene:

$$-\frac{f|v_I|v_I}{\Delta T^2} \Delta t^3 + \frac{3f|v_I|v_I}{\Delta T} \Delta t^2 + \left[v_I - \frac{g}{c}(h_{III} - h_I) \right] / \Delta T - 3f|v_I|v_I \Delta T + \frac{g}{c}(h_V - h_I) - v_I + f|v_I|v_I \Delta T = 0 \quad (26)$$

Puede observarse que (26) es una ecuación de tercer grado en Δt , ya que como se ha señalado $h_s = h_v$; al resolverla puede conocerse el valor de Δt_{j+1} por medio de (21).

Conviene notar que si no se admiten cargas inferiores a h_v , S_{j+1} determina el límite de aplicabilidad del método de las características sobre la frontera derecha. Por lo tanto, para puntos colocados arriba de S_{j+1} , se puede establecer que el método produce resultados razonablemente aproximados, a pesar de que para depresiones inferiores cercanas a -6.5 m habrá ocurrido la vaporización.

En cambio, la característica marcada como $-C_*$ en la ilustración 4a corresponderá al límite inferior de los puntos que como Z_0 (en $t = t_j + 1$ y distante ΔX de la frontera derecha) se han determinado con el método tradicional, puesto que para los puntos situados en o arriba de esta línea los valores de h son superiores a h_v .

Ahora bien, conociendo Δt_{j+1} se podrán definir por interpolación los valores de h y v en el punto Z_j (para $t = t_j + \Delta t_{j+1}$ y distante $2\Delta X$ de la frontera derecha). Al usar las ecuaciones (7) y (8), con estos valores y los correspondientes a S_{j+1} , es posible definir los montos de h_s y v_s en el punto S_{j+2} que se muestra en la ilustración 4a. Como el valor de h en S_{j+2} suele ser inferior a h_v , es necesario hacer una nueva interpolación que permita definir un nuevo punto S_{j+2} , donde el valor de h sea precisamente h_v . Para ello, se requiere partir de los puntos P_{j+1} y Q_{j+1} como se indica en la ilustración 4b. Dichos puntos están situados, en el tiempo, entre $I_{j+1} = Z_j$ y $III_{j+1} = Z_I$ para P_{j+1} , y entre $II_{j+1} = S_{j+1}$ y $IV_{j+1} = III_j$ para Q_{j+1} .

Si el intervalo de tiempo entre III_{j+1} y P_{j+1} (o entre IV_{j+1} y Q_{j+1}) se designa como $\Delta t_{j+2} = \Delta t_*$, podrá escribirse:

$$h_p = h_{III} + (h_I - h_{III}) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} \quad (27)$$

$$v_p = v_{III} + (v_I - v_{III}) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} \quad (28)$$

$$h_Q = h_{IV} + (h_{II} - h_{IV}) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} \quad (29)$$

$$v_Q = v_{IV} + (v_{II} - v_{IV}) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} \quad (30)$$

$$v_S = v_P - \frac{g}{c} (\bar{h}_S - h_P) - F |v_P| v_P \quad (35)$$

Por otra parte, al restar (5) de (4) se obtiene:

$$\frac{g}{c} (2h_S - h_P - h_Q) - v_P + v_Q + F |v_P| v_P - F |v_Q| v_Q = 0 \quad (31)$$

y al sustituir las expresiones de la (27) a la (30) se obtiene:

$$\begin{aligned} g(\Delta t_*) &= \frac{2g}{c} h_S - \\ &\frac{g}{c} \left[h_{III} - h_{IV} + (h_I - h_{III} + h_{II} - h_{IV}) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} \right] + \\ &+ v_{IV} - v_{III} + (v_{II} + v_{III} - v_{IV} - v_I) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} + \\ &+ F \left[v_{III} + (v_I - v_{III}) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} \right] \left| v_{III} + (v_I - v_{III}) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} \right| + \\ &+ F \left[v_{IV} + (v_{II} - v_{IV}) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} \right] \left| v_{IV} + (v_{II} - v_{IV}) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} \right| = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

La ecuación anterior puede resolverse numéricamente para determinar Δt_* con la condición $h_s = \bar{h}_s = h_v$. Al aplicar el método de Newton-Raphson se obtiene que para determinado valor Δt_* considerado como primera aproximación para resolver la ecuación, éste llevará en forma iterativa a la solución correcta con la expresión:

$$(\Delta t_*)^{i+1} = (\Delta t_*)^i + \frac{dg}{d\Delta t_*} \Big|_{\Delta t_* = (\Delta t_*)^i} \quad (33)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\Delta t_*} &= -\frac{g}{c} \left[\frac{h_I - h_{III}}{\Delta t_{j+1}} + \frac{h_{II} - h_{IV}}{\Delta t_{j+1}} \right] - \frac{v_I - v_{III}}{\Delta t_{j+1}} + \\ &+ \frac{v_{II} - v_{IV}}{\Delta t_{j+1}} + 2F \left| v_{III} - (v_I - v_{III}) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} \right| \frac{v_I - v_{III}}{\Delta t_{j+1}} \\ &- 2F \left| v_{IV} + (v_{II} - v_{IV}) \frac{\Delta t_*}{\Delta t_{j+1}} \right| \frac{v_{II} - v_{IV}}{\Delta t_{j+1}} \end{aligned} \quad (34)$$

Cuando se conozca el valor de Δt , se usarán (27) y (28) para definir h_P y v_P , lo que permitirá el empleo de (4) para calcular:

Como puede verse, las ecuaciones (33), (34) y (35) permiten definir el avance de la onda de depresión hacia la frontera izquierda, ya que podrán emplearse sucesivamente hasta llegar a la sección que diste ΔX de dicha frontera. Al efectuar este cálculo sucesivo será posible comprobar que $\Delta t_{j+3} < \Delta t_{j+2} < \Delta t_{j+1}$, lo que permitirá marcar un criterio para definir por extrapolación el punto Z_N desde el cual partirá una característica $-C$ para definir al punto S_N sobre la frontera izquierda. Obviamente, los valores de h y v en Z_N pueden calcularse por interpolación y el valor de $v = v_N$ en S_N se obtendrá por medio de (6).

Es muy importante asentar que el verdadero límite entre las separaciones intermedia y severa de la columna está dado por el valor de v_N en S_N (véase ilustración 4c). En efecto, si $v_N > 0$, ocurrirá la separación intermedia, en cuyo caso la restitución se hará gracias a la carga h_0 que prevalecerá en la frontera izquierda, así como a la energía cinética del agua remanente en este sitio. En cambio, si $v_N < 0$, podrá suponerse que la columna de vapor contenida en la tubería tiene una velocidad remanente en la dirección aguas arriba, por lo que su energía cinética se opone a la onda de restitución; por tanto, la fase de separación se prolongará hasta que esa energía se haya transferido y solamente la carga remanente h_0 podrá considerarse como la encargada de la restitución; es decir, en el cálculo dicha fase ocurrirá a partir de $v_N = 0$. Tal suposición puede explicar porqué en la separación severa se prolonga la etapa de separación, y que el segundo golpe sea menos intenso que el primero. Sin embargo, esta explicación resulta poco satisfactoria porque las cargas que se calculan con base en estas consideraciones suelen ser un tanto menores que las registradas experimentalmente. Además, el método propuesto no permite conocer cuánto tiempo se prolonga la fase de separación, por lo que su aplicación se circunscribe, en principio, a los casos de separación intermedia.

A pesar de estas limitaciones, el procedimiento permite formarse una primera idea de los efectos producidos por la separación de columna, ya que puede predecirlos con razonable aproximación en los casos de mayor interés que, como se recordará, corresponden a la separación intermedia. Así mismo, el procedimiento es menos confiable sólo cuando se presenta la separación severa. Dichos efectos tienen la característica de que las

sobrepresiones alcanzadas en el segundo golpe son menores que las que ocurren durante el primero.

Todas estas ideas se aclararán mediante los ejemplos numéricos que se presentan más adelante.

Metodología

De acuerdo con lo expuesto en el apartado precedente, el método propuesto implica los siguientes pasos:

Primer golpe

Con ayuda de la ecuación (6) para la frontera izquierda, la (7) y la (8) para los puntos intermedios y la (9) para la frontera derecha, se calcularán los valores de h y v , comprobándose que h en la frontera derecha no resulta menor que h_v . Si tal caso sucede, se prolongará este tipo de cálculo hasta que los valores de h en la frontera derecha vuelvan a aumentar. Si han ocurrido valores de h comprendidos entre -6.5 y h_v , pero que no sobrepasan este último valor, se dirá que se trata de una separación incipiente y aquí terminará el cálculo.

Separación. Si en la frontera derecha aparece un primer valor de h inferior a h_v , se procederá a calcular Δt y Δt_{j+1} por medio de (26) y (21), respectivamente. Después, se usarán sucesivamente las ecuaciones (33), (34) y (35) hacia la frontera izquierda hasta determinar v_N sobre ella, en la forma que ya se indicó. Si resulta positiva, se tratará de una separación intermedia y habiendo una continuidad entre la etapa de separación y la de restitución se calculará ésta como aquí se indica. Si por el contrario $v_N < 0$, se tratará de un caso de separación severa y habrá un lapso entre la fase de separación y la de restitución, que el método no puede predecir. Esta podrá estudiarse después de que transcurra dicho lapso de acuerdo con lo expresado a continuación.

Restitución. Por medio de (11) y (12) se calculan los valores de h_s y v_s a lo largo de la tubería, a partir de la frontera izquierda, donde se hará $h_P = h^0$ y $v_P = v_N$, si es una separación intermedia; o bien, $h_P = h_0$ y $v_P = 0$, si se trata de una separación severa. Este cálculo se hará sucesivamente hasta la sección que dista ΔX de la frontera derecha. Para conocer h_s en esta frontera, se utilizará (9).

Segundo golpe

Con la ecuación (6) para la frontera izquierda, la (9) para la derecha y la (13) y (14) para los puntos intermedios, considerando los valores definidos para h y v a lo largo de la característica de restitución, que se obtienen como se indicó anteriormente, se definirán los valores de h y v en todos los puntos de la etapa correspondiente al segundo golpe. Los valores máximos de h ocurrirán en la frontera derecha y determinarán la importancia de esta etapa. Para valores muy pequeños de A podrán aplicarse indistintamente las ecuaciones (13) y (14) ó (7) y (8).

Tres ejemplos numéricos

Con el propósito de comparar los resultados del modelo numérico con los de la instalación experimental del Instituto de Ingeniería de la UNAM, se considerará una tubería con longitud $l = 1469.0$ m, diámetro $D = 0.105$ m; así como las siguientes condiciones de operación para tres valores distintos de la relación de Jukovski:

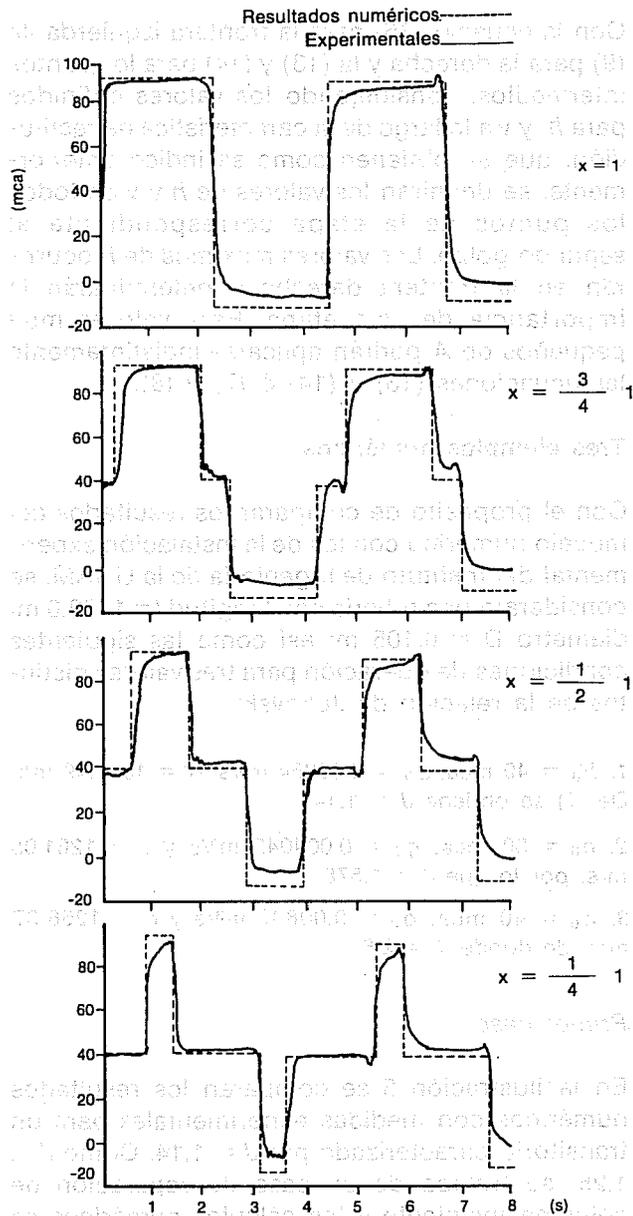
1. $h_0 = 40$ mca, $q_0 = 0.00354$ m³/s y $c = 1317.49$ m/s
De (1) se obtiene $J = 1.14$
2. $h_0 = 30$ mca, $q_0 = 0.004042$ m³/s y $c = 1261.05$ m/s, por lo que $J = 1.578$
3. $h_0 = 40$ mca, $q_0 = 0.00837$ m³/s y $c = 1266.37$ m/s, de donde $J = 2.6$

Primer caso

En la ilustración 5 se comparan los resultados numéricos con medidas experimentales para un transitorio caracterizado por $J = 1.14$. Como $J < 1.25$, se trataba de un caso de separación de columna incipiente y los cálculos numéricos se efectuaron con el método de las características tradicional. En esta situación, como en las siguientes, tanto las medidas como los cálculos numéricos corresponden a las secciones que distan $1/4 L$, $1/2 L$, $3/4 L$ y L del extremo inicial; los resultados del cálculo numérico se presentan en la ilustración con un trazo interrumpido y las medidas experimentales con uno continuo.

Se observa que en la etapa del segundo golpe no se tienen presiones mayores que las que se presentan en el primero, por lo que el cálculo tradicional es suficientemente satisfactorio en la predicción de sobrepresiones. Las presiones mínimas que se calcularon son menores que la

5. Separación de columna incipiente ($J = 1.14$)



vaporización (en la ciudad de México, $h_v \approx -8$ mca respecto a la presión atmosférica), lo cual no reviste importancia, ya que de antemano se sabe que la presión mínima posible es h_v .

Segundo caso

En la ilustración 1 se comparan los resultados numéricos con medidas experimentales para un transitorio caracterizado por $J = 1.578$. Este fue un caso de separación de columna intermedia y los cálculos numéricos se realizaron con la metodología presentada en este artículo. Debe aclararse

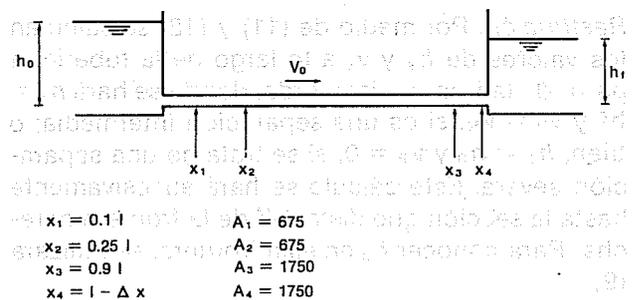
aquí que el procedimiento desarrollado se programó para trabajar sólo hasta el final del segundo golpe, antes de que en el extremo terminal se presenten por segunda vez presiones tan bajas como la de vaporización. Se observa que el método de cálculo puede representar de manera adecuada los registros de presiones tomadas en la instalación experimental, incluso en la etapa del segundo golpe. En esta etapa el método predice con buena aproximación la magnitud de las espigas de sobrepresión características del fenómeno de separación de columna (Martin, 1983).

En la ilustración 6 se marca la posición y el parámetro de apertura de las compuertas utilizadas en el modelo numérico en la etapa de restitución y segundo golpe. La compuerta más cercana al extremo terminal fue abriéndose durante el segundo golpe, de acuerdo con la ley $A(t) = 0.7 \cdot A(t-t)$.

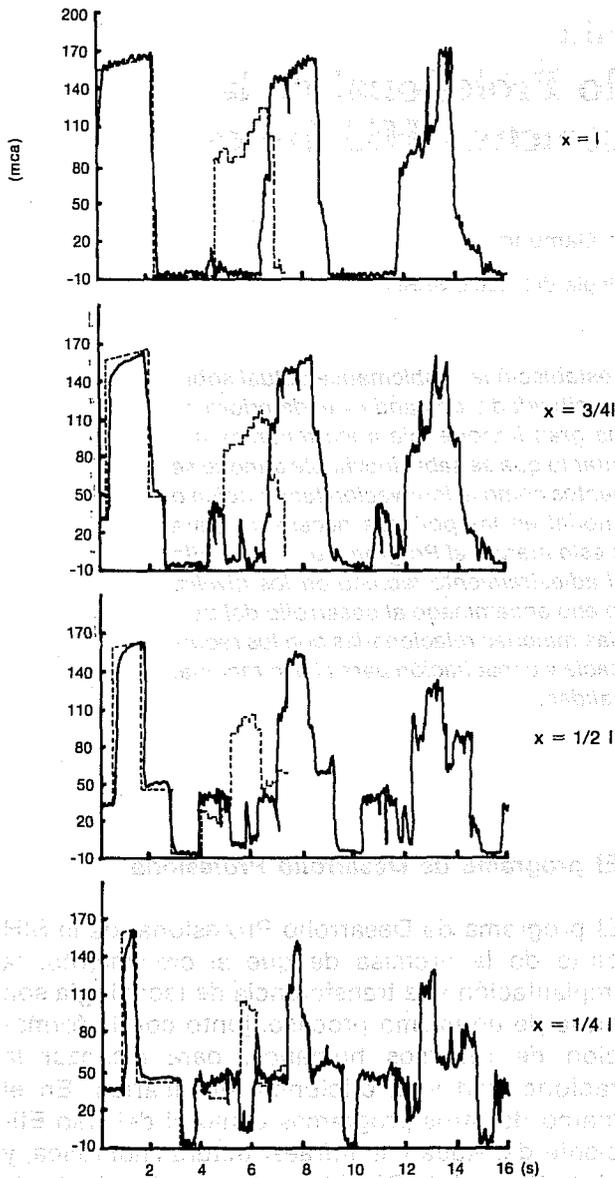
Tercer caso

En la ilustración 7 se comparan resultados numéricos con medidas experimentales para un transitorio caracterizado por $J = 2.6$. Como $J > 2.5$, este caso corresponde a uno de separación de columna severa. En el registro de medidas experimentales se observa que la etapa de separación se alarga respecto a la de separación intermedia del segundo caso. En el cálculo numérico, la velocidad del agua en el extremo inicial, en el momento en que la separación alcanza dicho extremo, resultó igual a -0.152 m/s, por lo que no hay continuidad entre las etapas de separación y restitución; el segundo golpe aparece antes, según el método, de lo que en realidad sucede. Sin embargo, como ya se había apuntado antes, para estos casos el segundo golpe no presenta sobrepresiones mayores que las registradas durante el primero, por lo que resultan adecuadas

6. Posición de válvulas para simulación



7. Separación de columna severa ($J = 2.6$)



las presiones máximas que se calcularon con el método de las características tradicional aplicado a ese primer golpe.

Conclusiones

El método de las características que se emplea tradicionalmente en cálculos de golpe de ariete en conducciones completamente llenas se generalizó para el caso simple de una tubería horizontal, a través de la implantación de un algoritmo que permite mover la frontera final, simulando el movimiento de la interfase que marca el límite de aplicación del método de las características. Al comparar con medidas experimentales los resultados que proporciona el método propuesto, se observa que la concordancia es razonablemente buena. Sin embargo, habrá que sistematizar la selección del número, posición y abertura de las compuertas que se utilicen en los cálculos durante las etapas de restitución y segundo golpe. Además, conviene insistir en que el método propuesto conduce a mejores resultados para el caso de separación intermedia que, como se ha mostrado, es el de mayor interés para el proyectista.

Referencias

Chaudry, M.H. *Applied Hydraulic Transients*, Van Nostrand, Reinhold, Nueva York, NY, EUA, 1979.
 Martin, S.M. *Experimental Investigation of Column Separation with Rapid Closure of Downstream Valve*, IV Int. Conf. on Pressure Surges, Bath England, Sept. 1983, Paper B3.
 Sharp, B.B. *Water Hammer*, Arnold, Londres, 1981.

1 Se agradece la colaboración de Alejandro Sánchez Huerta y Yunuén Guevara Garay en la realización de los experimentos y el registro de medidas.