

Estimación óptima de la precipitación media con el método Kriging

Jaime Collado

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, SARH

En este artículo se presenta el método Kriging, se explica su aplicación para calcular la precipitación media en un área o cuenca y se da especial atención a las hipótesis que conducen a establecer las ecuaciones Kriging, así como a la aplicabilidad de las mismas. Se definen las funciones intrínsecas aleatorias de orden k y se muestra su relación con procesos estacionarios. También se presenta un ejemplo relativo al cálculo de la precipitación media en el Estado de Morelos, empleando una función de covarianza generalizada de orden 1 y se dan sugerencias prácticas para aplicar el método Kriging.

Introducción

Estimaciones de la precipitación media en un área determinada son necesarias para un sinnúmero de aplicaciones hidrológicas. La cuantificación del volumen anual de agua disponible en una región es indispensable para asignarla a distintos usos, tales como agricultura, agua potable, hidroelectricidad, etc. El cálculo del volumen de lluvia efectiva de una sola tormenta es fundamental, entre otras cosas, para obtener pronósticos hidrológicos de escurrimiento con objeto de definir la política de operación óptima de una presa.

En hidrología, la precipitación media sobre un área ha sido tradicionalmente calculada con base en polígonos de Thiessen, que en otras áreas del conocimiento se denominan mosaicos de Dirichlet, dominios de Voronoi o regiones de Wigner-Seitz. De acuerdo con este método, a cada estación hidrológica de una cuenca se le asocia un polígono de Thiessen, que define un área donde cada uno de sus puntos está más cerca de esa estación que de cualquier otra. El cociente que resulta de dividir el área de cada polígono entre el área total define un conjunto de pesos conforme a los cuales la precipitación media puede ser calculada como un promedio pesado. Existen programas de computadora para calcular tanto los pe-

sos (Diskin, 1970) como los polígonos (Green y Sibson, 1978) en forma sistematizada. No obstante la gran popularidad de este método, muchos esfuerzos se han orientado a estimar la precipitación media con otras técnicas, como lo demuestran las comparaciones presentadas por Creutin y Obled (1982) y por Singh y Chowdhury (1986). La mayor parte de los métodos analizados por estos autores son determinísticos y, entre éstos, no se puede aseverar una marcada superioridad de uno sobre otro.

Muchos son los factores que afectan la distribución espacial de la precipitación sobre un área. Por lo tanto, la red de pluviómetros debe tener la capacidad de muestrear adecuadamente dicha distribución, y el método empleado para estimar la precipitación media debe ser apto para representar esa distribución. Las variaciones espaciales de la precipitación pueden estudiarse mediante procesos estocásticos que las representen en forma continua sobre la región considerada (campos aleatorios) y a partir de esta hipótesis construir un método, llamado Kriging, para estimar valores puntuales o funciones lineales del campo aleatorio en una región, utilizando un conjunto limitado de valores observados. Adicionalmente a la estimación puntual o promedio de la precipitación, el método Kriging provee una medida de la precisión de los valores estimados.

En este artículo se exponen los conceptos e hipótesis básicos que conducen al desarrollo de Kriging, una metodología para identificar la estructura de las variaciones espaciales de la precipitación, un ejemplo de aplicación y recomendaciones prácticas para el uso del método en diversas situaciones. Debe hacerse notar que, aunque este trabajo se limita a un campo aleatorio de precipitaciones, el método Kriging puede utilizarse para estimar los valores de cualquier variable regionalizada (es decir, aquella que está definida en un espacio de una, dos o tres dimensiones y que muestra una estructura espacial) que describa un fenómeno geofísico.

Fundamentos del método Kriging

Sea $Z(x)$ un proceso estocástico continuo que describe la distribución de la precipitación total en un intervalo fijo de tiempo, donde la notación vectorial x representa las coordenadas de un espacio bidimensional. Asumiendo que las mediciones pueden efectuarse sin error instrumental, la observación $z(x)$ es una realización del proceso $Z(x)$ y, para hacer inferencias sobre éste, es necesario reconstruir su función de distribución de probabilidad a partir de una sola realización. Esto se debe a que dos tormentas constituyen eventos meteorológicamente independientes y, por tanto, poseen estructuras espaciales diferentes. Sin embargo, una sola realización es insuficiente incluso para deducir los momentos de un campo aleatorio, por lo cual es necesario establecer hipótesis simplificadoras que permitan identificar la estructura espacial de la precipitación.

El objetivo de cualquier método de estimación es extraer información de los datos disponibles. En particular, el método Kriging es un estimador de funciones lineales de un campo aleatorio que toma en cuenta la variabilidad espacial, a través de la covariancia, el semivariograma o la covariancia generalizada del proceso $Z(x)$. A su vez, estas funciones tienen que identificarse y sus parámetros estimarse a partir de la observación $z(x)$. Entonces, la precipitación media sobre un área, A , definida como

$$\bar{P} = \frac{1}{A} \int_A Z(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (1)$$

se calculará con un estimador lineal que considera n estaciones hidrológicas

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{X}_i) \quad (2)$$

donde los pesos λ_i , $i=1, \dots, n$ se determinan de tal manera que el valor esperado del estimador sea igual al valor esperado de la precipitación media

$$E(\hat{P}) = E(\bar{P}) \quad (3)$$

y que el error cuadrado medio de la estimación sea mínimo

$$Var(\hat{P} - \bar{P}) = \min \quad (4)$$

La primera condición asegura que el estimador no produzca errores sistemáticos en los valores estimados, esto es, Kriging es un estimador insesgado. La segunda propiedad establece un criterio de optimalidad con respecto a la variancia de estimación; esto es, cualquier otro estimador lineal e insesgado tiene una variancia del error de la estimación mayor que la de Kriging. A continuación se exponen las hipótesis que permiten identificar y utilizar la estructura espacial de la precipitación en la construcción del estimador Kriging.

Estacionariedad de segundo orden

Un campo aleatorio es estacionario de segundo orden si satisface las siguientes condiciones:

- i) La media es una constante independiente de las coordenadas, esto es

$$E[Z(\mathbf{X})] = m(\mathbf{X}) = m, \quad (5)$$

- ii) La variancia es una constante independiente de las coordenadas, o sea

$$Var[Z(\mathbf{X})] = \sigma^2(\mathbf{X}) = \sigma^2, \text{ y} \quad (6)$$

- iii) La función de covariancia es independiente de la ubicación de cada punto, sólo depende de la distancia entre ellos

$$cov(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = cov(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = cov(\mathbf{y}) \quad (7)$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

Asumiendo que la función de covariancia (7) y la media (5) son conocidas, la condición de insesgadura (3) aplicada al estimador (2) conduce a

$$E \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{X}_i) \right] = E \left[\frac{1}{A} \int_A Z(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \right] \quad (8)$$

Como ambas ecuaciones son lineales

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i E[Z(\mathbf{X}_i)] = \frac{1}{A} \int_A E[Z(\mathbf{X})] d\mathbf{X} \quad (9)$$

Utilizando la propiedad (5), la ecuación (9) se reduce a

$$m \sum_{i=1}^n \lambda_i = m \frac{1}{A} \int_A d\mathbf{X} \quad (10)$$

por lo que la condición de insesgadura se simplifica a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (11)$$

El error cuadrado medio de la estimación por minimizar, ecuación (4), es

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= E[(\hat{P} - \bar{P})^2] = E[\hat{P}^2] - 2E[\hat{P}\bar{P}] + E[\bar{P}^2] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j Z(\mathbf{X}_i) Z(\mathbf{X}_j) \right] - \\ &\quad - 2E \left[\frac{1}{A} \int_A \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{X}) Z(\mathbf{X}_i) d\mathbf{X} \right] + \\ &\quad + E \left[\frac{1}{A^2} \int_A \int_A Z(\mathbf{X}_1) Z(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Invocando linealidad y la propiedad (7), la variancia del error de la estimación se puede expresar como

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \text{cov}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) -$$

$$\begin{aligned} &- \frac{2}{A} \int_A \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{cov}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) d\mathbf{X} + \\ &+ \frac{1}{A^2} \int_A \int_A \text{cov}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 \end{aligned} \quad (13)$$

Introduciendo un multiplicador de Lagrange (μ) el error cuadrado medio de la estimación (13) puede minimizarse sujeto a la condición de insesgadura (11). Después de formar la función auxiliar, de derivar con respecto a los pesos y al multiplicador de Lagrange, y de igualar a cero, se obtiene un sistema lineal de $n + 1$ ecuaciones con igual número de incógnitas

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j \text{cov}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) + \mu &= \\ &= \frac{1}{A} \int_A \text{cov}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) d\mathbf{X}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i &= 1 \end{aligned} \quad (14)$$

de donde se obtienen los pesos óptimos λ_i^* y el multiplicador μ .

El error cuadrado medio de la estimación puede ser derivado (Bras y Rodríguez-Iturbe, 1985), multiplicando las primeras n ecuaciones (14) por λ_i^* y sumando, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i^* \lambda_j^* \text{cov}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) + \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i^* &= \\ &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \int_A \text{cov}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (15)$$

y sustituyendo esta expresión en (13), se llega a la mínima variancia del error de la estimación

$$\begin{aligned} \sigma_p^{2*} &= \frac{1}{A^2} \int_A \int_A \text{cov}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 - \\ &- \frac{1}{A} \int_A \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \text{cov}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) d\mathbf{X} - \mu \end{aligned} \quad (16)$$

La evaluación de las integrales en (16) requiere una definición funcional de la covariancia y, en general, no es posible encontrar una solución en forma cerrada; hipótesis de homogeneidad e isotropía pueden reducir las integrales de bidimensionales a unidimensionales (Bras y Rodríguez-Iturbe, 1976). Otra forma de calcular dichas integrales es mediante el método Monte Carlo, ya que el primer término de la ecuación (16) es el valor medio de la función de covariancia entre dos puntos barriendo independientemente el área A , y la integral del segundo término en (16) es el valor medio de la covariancia entre el punto de medición x_i y un punto que describe el área A .

Existe un número limitado de clases de covariancias apropiadas para procesos espaciales (Whittle, 1963) que pueden ser comparadas con la covariancia empírica o experimental y así identificar una posible estructura. Una vez identificada la forma funcional de la covariancia, sus parámetros pueden estimarse por prueba y error, y la bondad de ajuste puede ser evaluada con el método de validación cruzada (Ripley, 1981). El lector puede consultar Kitanidis y Lane (1985) para obtener detalles sobre la estimación de la covariancia con el método de máxima verosimilitud.

El sistema Kriging (14) muestra que la estimación considera i) las distancias entre estaciones hidrológicas mediante los términos $cov(x_i - x_j)$, ii) las distancias entre los puntos de observación y un punto que describe el área A con los términos $cov(x - x_i)$, y iii) la estructura espacial de la precipitación a través de la función de covariancia. Los pesos óptimos y la variancia de estimación se calculan para cada caso específico, y sólo dependen de la estructura espacial de la precipitación y de la configuración geométrica de los puntos de medición. En particular, las λ s no dependen de los valores observados $z(x_i)$, excepto porque éstos son utilizados para identificar la estructura y para estimar los parámetros de la función de covariancia. Esta propiedad del estimador Kriging ha sido empleada por Delhomme (1978) para localizar, por ejemplo, una nueva estación hidrológica en una cuenca, de tal manera que se obtenga la máxima reducción de la variancia de estimación. Véase también Rouhani, (1985).

Las ecuaciones (14) son conocidas como Kriging por bloques, debido a que los pesos óptimos obtenidos con ellas conducen a estimar una funcional lineal (1) del proceso $Z(x)$, definida en un área A , considerada como un bloque. Sin embargo, un caso límite se presenta cuando el área A se reduce a un punto x_0 , donde se desea conocer el

valor de la precipitación; en este caso, la integral doble que aparece en (16) es igual a la variancia del proceso σ^2 , y las integrales simples de las ecuaciones (14) y (16) se reducen a $cov(x_0 - x_i)$. Las ecuaciones (14) son conocidas como Kriging puntual, y el estimador (2), funciona como un interpolador exacto, restituyendo en cada punto de medición x_i , el valor observado $z(x_i)$ con nula variancia de estimación.

La estimación de valores puntuales o promedios espaciales requiere solucionar tantos sistemas Kriging como puntos o áreas se deseen estimar. Sin embargo, si todas las estaciones hidrológicas se utilizan para cada punto o área, solamente cambia el lado derecho de las ecuaciones (14) y la matriz de los sistemas Kriging necesita ser invertida una sola vez. En este caso se habla de una vecindad única. Pero si el número de puntos de medición es muy grande o el área de influencia de la función de covariancia representa una distancia menor que la de los puntos más alejados, para Kriging puntual se pueden utilizar sólo las 10 ó 20 estaciones más cercanas al punto por estimar, en cuyo caso se habla de una vecindad móvil. Para Kriging por bloques, se deben usar todos los puntos comprendidos dentro del área de interés y, si es posible, observaciones hechas en la vecindad inmediata del área, ya que las variancias de estimación más grandes se presentan en la frontera de la región que contiene las estaciones hidrológicas.

Hipótesis intrínseca

Un campo aleatorio $Z(x)$ satisface la hipótesis intrínseca y se le denomina función intrínseca aleatoria (FIA) si las diferencias de primer orden $Z(x_1) - Z(x_2)$ son estacionarias en la media y en la variancia

$$E[Z(X_1) - Z(X_2)] = m(y) \quad (17)$$

$$Var[Z(X_1) - Z(X_2)] = 2\gamma(y) \quad (18)$$

y por lo tanto, independientes de las coordenadas de los puntos x_i , esto es, sólo dependen de la diferencia vectorial $y = x_1 - x_2$. La hipótesis intrínseca es una condición menos restrictiva que la de estacionariedad de segundo orden, ya que puede manejar procesos con variancia infinita. Se asume que sólo diferencias de la variable aleatoria $Z(x)$, tales como $Z(x_1) - Z(x_2)$, poseen una variancia finita e igual al variograma estacionario $2\gamma(y)$,

definido por la ecuación (18). La $\text{var} [Z(x)]$ y la $\text{cov}(x_1, x_2)$ no necesariamente existen.

La variancia de una combinación lineal de una función intrínseca aleatoria es finita si la suma de los pesos es igual a cero (Matheron, 1971). A dicha combinación lineal se le califica como *autorizada* y, bajo la hipótesis intrínseca, sólo las combinaciones lineales autorizadas tienen una variancia finita. Adicionalmente ésta puede ser calculada reemplazando la función de covariancia $\text{cov}(x_i - x_j)$ por menos el semivariograma $-\gamma(x_i - x_j)$. Sin embargo, el objeto principal de la hipótesis intrínseca no es tratar con procesos de variancia infinita, debido a que los procesos geofísicos poseen por lo general variancias finitas. La implicación práctica del cálculo de la variancia de una combinación lineal autorizada es que si la media del proceso es constante, aunque sea desconocida, el semivariograma puede estimarse sin sesgo, ya que no se requiere estimar la media.

Asumiendo que la media $m(x)$ y el semivariograma $\gamma(y)$ definido por la ecuación (18) son conocidos, la condición de insesgadura (3) resulta ser (véanse las ecuaciones 8 y 9)

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i m(\mathbf{X}_i) = \frac{1}{A} \int_A m(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (19)$$

De fundamental importancia para Kriging con semivariogramas, es la existencia de la variancia del error de la estimación. El error de la estimación es

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{X}_i) - \frac{1}{A} \int_A Z(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (20)$$

y para que posea una variancia finita debe ser una combinación lineal autorizada; es decir, la suma de los pesos debe ser igual a cero. Introduciendo una función continua de peso

$$\int_A W(d\mathbf{X}) \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{\mathbf{X}_i} - \frac{1}{A} \int_A d\mathbf{X} \quad (21)$$

donde:

$$\delta_{\mathbf{X}_i} = \begin{cases} 1, & \mathbf{X} = \mathbf{X}_i \\ 0, & \mathbf{X} \neq \mathbf{X}_i \end{cases} \quad (22)$$

el error (20) puede expresarse como una *combinación lineal continua*

$$\int_A Z(\mathbf{X}) W(d\mathbf{X}) \quad (23)$$

que debe satisfacer la condición

$$\int_A W(d\mathbf{X}) = 0 \quad (24)$$

para ser una combinación lineal autorizada. De la ecuación (24) se obtiene que la condición para que el error de la estimación (20) posea una variancia finita es

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (25)$$

La función auxiliar por minimizar se obtiene al substituir la función de covariancia por menos el semivariograma en (13) y sumar las restricciones de *autorización* (25) y de insesgadura (19), multiplicadas por sus respectivos multiplicadores de Lagrange μ_0 y μ_1 . Derivando e igualando a cero, se llega al sistema

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) + \mu_0 + \mu_1 m(\mathbf{X}_i) &= \\ = \frac{1}{A} \int_A \gamma(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) d\mathbf{X}, & \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i m(\mathbf{X}_i) = \frac{1}{A} \int_A m(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$$

cuyos pesos óptimos se utilizan para calcular el mínimo error cuadrado medio de la estimación

$$\begin{aligned} \sigma_p^{2*} &= - \frac{1}{A^2} \int_A \int_A \gamma(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 + \\ &+ \frac{1}{A} \int_A \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \gamma(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) d\mathbf{X} + \\ &+ \mu_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i^* + \mu_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i^* m(\mathbf{X}_i) \end{aligned} \quad (27)$$

Si la media $m(x)$ es constante, la última ecuación de (26) es redundante y la condición de insesgadura (19) coincide con la condición de autorización (25) y, los términos que contienen el multiplicador de Lagrange μ_1 en las ecuaciones (26) y (27) deben removerse. En el caso de Kriging puntual, la integral doble en (27) es igual a cero, y las integrales sencillas que contienen el semivariograma en (26) y (27) se reemplazan con $\gamma(x_0 - x_i)$. La estimación estadística del semivariograma puede efectuarse, por ejemplo, mediante regresión con mínimos cuadrados (McCuen y Snyder, 1986), con máxima verosimilitud y métodos iterativos (Kitanidis y Lane, 1985) o bien con estimadores robustos tipo M (Cressie y Hawkins, 1980).

Hipótesis intrínseca generalizada

Un campo aleatorio bidimensional $Z(x)$ satisface la hipótesis intrínseca generalizada si los pesos de la combinación lineal

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{X}_i) \quad (28)$$

satisfacen las condiciones

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^{p_1} v_i^{p_2} = 0 \quad (29)$$

para todos los enteros

$$0 \leq p_1 + p_2 \leq k \quad (30)$$

siendo u_i y v_i las coordenadas cartesianas del punto x_i . Al proceso $Z(x)$ se le denomina función intrínseca aleatoria de orden k (FIA- k) y a la combinación lineal (28), incremento generalizado de orden k . Simplificando la notación, los monomios que aparecen en (29) se pueden reemplazar por funciones básicas $f^l(x)$ donde l representa la condición (30). Así, la combinación lineal (28) es un incremento generalizado de orden k si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f^l(\mathbf{X}_i) = 0 \quad (31)$$

se satisface para todos los monomios de orden $l \leq k$.

La consideración de incrementos generalizados de orden k implica trabajar con toda una clase equivalente de procesos; esto es, las funciones $Z(x)$ y $Z(x) + R(x)$, donde el orden $R(x)$ es menor o igual que k , poseen exactamente el mismo incremento generalizado de orden k (Matheron, 1973). La implicación práctica de esta propiedad es que un incremento generalizado de orden k puede filtrar un polinomio de orden k ; por ejemplo, para $k=0$, la combinación lineal (28) filtra una constante, que es lo que se obtiene cuando se utiliza la hipótesis intrínseca. En otras palabras, las primeras diferencias filtran constantes; las segundas, funciones lineales, etc. La idea de la hipótesis intrínseca generalizada es, entonces, considerar diferencias sucesivas o incrementos de $Z(x)$ hasta obtener un proceso estacionario.

Similar al caso de las combinaciones lineales autorizadas, dentro de la hipótesis intrínseca generalizada sólo los incrementos generalizados de orden k tienen una variancia finita, y ésta se puede calcular con una función de covarianza generalizada (FCG) estacionaria de orden k , $K(y)$. Casi siempre se trabaja con covarianzas generalizadas homogéneas e isotrópicas, que pueden expresarse en función del módulo, h , de la diferencia vectorial y , $K(h)$. Condiciones de admisibilidad de funciones de covarianza generalizada han sido estudiadas por Christakos (1984).

La extensión al caso de incrementos generalizados continuos de orden k se expresa de la siguiente manera. Si la condición

$$\int_A f^l(\mathbf{X}) W(d\mathbf{X}) = 0 \quad (32)$$

se satisface para toda $f^l(x)$ de orden $l \leq k$. Entonces

$$\int_A Z(\mathbf{X}) W(d\mathbf{X}) \quad (33)$$

es un incremento generalizado de orden k , y $Z(x)$ es una FIA- k .

La teoría de las FIA- k asume que la media, también conocida como *deriva* o *tendencia*, puede modelarse localmente con un polinomio

$$m(\mathbf{X}) = \sum_{l=0}^v a_l f^l(\mathbf{X}) \quad (34)$$

donde las funciones básicas $f^l(x)$ son los monomios referidos en (31), y los coeficientes a_l son constantes desconocidas que por fortuna no se

requieren estimar. El orden de la media se denota con k , y ν es el número de monomios; por ejemplo, en un plano definido por las coordenadas cartesianas u y v ,

$$k = 0 \quad m(\mathbf{X}) = a_0 \text{ (tendencia constante)}$$

$$k = 1 \quad m(\mathbf{X}) = a_0 + a_1 u + a_2 v \quad \text{(tendencia lineal)}$$

$$k = 2 \quad m(\mathbf{X}) = a_0 + a_1 u + a_2 v + a_3 u^2 + a_4 v^2 + a_5 uv \quad \text{(tendencia cuadrática)}$$

Asumiendo que la función de covariancia generalizada y el orden de la media son conocidos, la condición de inesgadura es idéntica a (9). Sustituyendo la definición de la media (34), se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{l=0}^{\nu} a_l f^l(\mathbf{X}_i) = \frac{1}{A} \int_A \sum_{l=0}^{\nu} f^l(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (35)$$

o bien

$$\sum_{i=1}^n a_i \left[\sum_{l=0}^{\nu} \lambda_i f^l(\mathbf{X}_i) - \frac{1}{A} \int_A f^l(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \right] = 0 \quad (36)$$

Esta ecuación debe ser satisfecha para cualquier valor de las constantes a_i , por lo tanto, la condición de inesgadura se expresa en las siguientes $\nu + 1$ ecuaciones

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f^l(\mathbf{X}_i) - \frac{1}{A} \int_A f^l(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, \nu \quad (37)$$

o, en forma continua

$$\int_A f^l(\mathbf{X}) W(d\mathbf{X}) = 0 \quad (38)$$

Si en el caso de la hipótesis intrínseca la media se modelara polinomialmente (34), la condición de inesgadura (19) se expresaría de manera idéntica a (37) y coincidiría con la condición de autorización (24) que, en este caso, es igual a (38).

Por lo que se refiere a la hipótesis intrínseca generalizada, la ecuación (38) es la condición re-

querida para que la combinación lineal (33) sea un incremento generalizado de orden k y, por tanto, para que tenga una variancia finita. Debe notarse que la ecuación (33) es el error de la estimación (compárese con (23)), por lo cual coinciden las condiciones de inesgadura y de existencia de la variancia del error de la estimación, y se expresan mediante (37).

Análogamente a los casos anteriores, la variancia de la estimación se minimiza sujeta a las condiciones de inesgadura, resultando el sistema Kriging

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j K(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) - \sum_{l=0}^{\nu} \mu_l f^l(\mathbf{X}_i) = \frac{1}{A} \int_A K(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) d\mathbf{X}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (39)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f^l(\mathbf{X}_i) = \frac{1}{A} \int_A f^l(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad l = 0, 1, \dots, \nu$$

y la mínima variancia

$$\begin{aligned} \sigma_p^{2*} = & \frac{1}{A^2} \int_A \int_A K(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 - \\ & - \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \int_A K(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) d\mathbf{X} + \\ & + \frac{1}{A} \sum_{l=0}^{\nu} \mu_l \int_A f^l(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (40)$$

En el caso de Kriging puntual, la integral de la primera ecuación de (39) se sustituye por $K(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)$ y la integral de la segunda se reduce a $f^l(\mathbf{x}_0)$; y la integral doble de (40) se simplifica a $K(0)$, que es una cantidad no negativa.

La principal ventaja de utilizar incrementos generalizados es que se evita el problema de estimar la media o tendencia. Así, con este enfoque sólo se requiere que el orden k de la FIA sea capaz de filtrar la media, si es distinta de cero. Delfiner (1976) ha encontrado que la mayor parte de los datos registrados en la práctica pueden describirse satisfactoriamente con funciones intrínsecas aleatorias de orden 0, 1 ó 2. El cuadro 1 muestra funciones de covariancia generalizada polinomiales, junto con las restricciones que aseguran que las variancias de incrementos generalizados sean siempre positivas. Al término

1. Modelos apropiados para K (h)

Orden k	Tendencia	K (h)	Restricciones
0	Constante	$C \delta(h) + a_1 h $	$C \geq 0, a_1 \leq 0$
1	Lineal	$C \delta(h) + a_1 h + a_3 h ^3$	$C \geq 0, a_1 \leq 0, a_3 \geq 0$
2	Cuadrática	$C \delta(h) + a_1 h + a_3 h ^3 + a_5 h ^5$	$C \geq 0, a_1 \leq 0, a_3 \leq 0, a_5 \geq -(10/3) (a_1 a_3)$

Donde $\delta(h) = 1.0$, si $h = 0$; y $\delta(h) = 0$, si $h \neq 0$.

C se le denomina efecto de *pepita* (*nugget effect*), de acuerdo con la práctica mineralógica de llamar *pepita* a un pequeño macizo, y representa errores de muestreo en los valores observados $z(x_i)$, o bien irregularidades del proceso $Z(x)$ a una escala mucho menor que el espaciamiento de los puntos de medición. Esto significa que la suavidad de la superficie predicha depende del comportamiento de $K(h)$ para h pequeña, y que la propiedad del estimador Kriging de ser un interpolador exacto se obtiene a costa de discontinuidades en los puntos de medición si $K(h)$ no es continua en el origen.

Para identificar la estructura de una FCG- k no es necesario estimar los coeficientes de la media polinomial, sólo se requiere conocer el orden k de los incrementos generalizados que filtran la media. El orden k de la FCG que represente adecuadamente el proceso muestreado puede determinarse como se explica a continuación (Delfiner, 1976). Si se eliminan secuencialmente los datos de los puntos de medición, los errores Kriging de estimación obtenidos con $K(h) = -|h|$ pueden compararse para $k=0, 1$ y 2 , dado que este modelo de covariancia generalizada es apropiado para cualquier valor de k . Al orden que produce el error Kriging más pequeño se le asigna el grado 1, y a los restantes los grados 2 y 3, el último de los cuales es el de mayor error Kriging. Los grados de cada orden se promedian sobre todos los puntos estimados, y el orden con el menor grado promedio se considera el mejor. Otros criterios, como el error cuadrado medio de la estimación para diferentes órdenes, han sido utilizados por Hughes y Lettenmaier (1981).

Una vez que se determina el orden k de la FCG, es necesario estimar sus parámetros. Un primer enfoque es construir incrementos generalizados con todas las covariancias generalizadas apropiadas para el orden considerado y minimizar el error cuadrado medio de las variancias Kriging (Kafritsas y Bras, 1981). Otra forma de hacerlo es utilizar regresión con mínimos cuadrados (Starks y Fang, 1982), regresión con mínimos cuadrados pesados (Bras y Rodríguez-Iturbe, 1985) o bien con máxima verosimilitud (Kitanidis, 1983).

Por último, debe considerarse el número de puntos, n , requeridos para utilizar el método Kriging con covariancias generalizadas. En el caso de Kriging por bloques, es necesario emplear todos los puntos comprendidos en el área estudiada y, si es posible, puntos localizados en la vecindad inmediata. Para Kriging puntual, Kafritsas y Bras (1981), sugieren usar los 8, 12 ó 16 puntos más cercanos al punto por estimar, si $k=0, 1$ ó 2 , respectivamente.

Ejemplo de aplicación

El propósito de este ejemplo es mostrar cómo un modelo, por simple que sea, reduce la variancia *a priori* del proceso. Considérese el cálculo de la precipitación media en el Estado de Morelos, en un día cualquiera. Entre el 21 y el 27 de septiembre de 1967, hubo fuertes lluvias en toda la cuenca del Río Balsas, debido a la presencia de un huracán. Supóngase que es necesario calcular la lluvia media diaria para elaborar un pronóstico de avenida a la entrada de la presa Infiernillo. En este ejemplo se muestra el cálculo de la lluvia media para el 26 de septiembre de 1967. La lluvia registrada ese día se muestra en el cuadro 2, junto con la localización de las estaciones hidrológicas más cercanas al Estado de Morelos y con coordenadas cartesianas con origen en $18^\circ 20'$ de latitud norte y $99^\circ 30'$ de longitud oeste.

Entre los métodos más comunes (Linsley *et al.*, 1975) para calcular la lluvia media, está el de la media aritmética. Este método asume que la lluvia es constante y no toma en cuenta las posiciones relativas de las estaciones hidrológicas ni la posible estructura espacial de la lluvia. La variancia del error de la estimación puede obtenerse con la ecuación (13), asumiendo independencia estadística de las observaciones, resultando

$$\sigma_p^2 = s_x^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{A^2} - \frac{2}{A} \right) \quad (41)$$

donde S_x^2 es la variancia *a priori* del proceso, o sea, la variancia muestral de las mediciones, y A es el área del Estado de Morelos, igual a 4941 km².

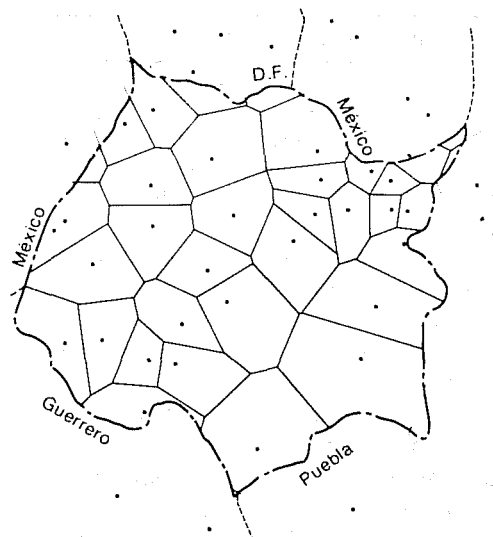
2. Precipitación observada en el Estado de Morelos (26 de septiembre de 1967)

Estación hidrológica	Localización		Coordenadas		Lluvia (mm)
	Latitud norte	Longitud oeste	(Km) u	v	
Morelos					
Achichipilco	18°57'00"	98°49'00"	71.90	68.40	20.0
Atlatlahuacan	18°55'30"	98°54'00"	62.10	65.20	26.0
Cuautla	18°48'30"	98°57'30"	56.10	52.90	16.9
Cuernavaca	18°55'00"	99°14'30"	27.20	64.40	105.5
El Rodeo	18°46'00"	99°20'30"	15.80	48.70	107.6
Huajintlan	18°37'00"	99°25'00"	8.60	31.80	24.0
Huautla	18°26'30"	99°02'00"	48.49	10.00	18.0
Huecahuasco	18°56'00"	98°47'00"	75.88	66.60	17.0
Huitzilac	19°02'00"	99°16'30"	22.25	77.00	59.2
Jonacatepec	18°41'00"	98°48'30"	72.10	39.70	14.0
Ocuituco	18°52'30"	98°47'00"	75.88	59.50	20.8
Palpan	18°52'00"	99°25'00"	8.60	58.80	43.1
San Gabriel	18°37'00"	99°20'30"	15.80	31.90	35.0
Temilpa	18°41'30"	99°06'00"	41.40	40.00	13.0
Temixco	18°50'30"	99°14'00"	27.75	56.20	48.0
Tepalcingo	18°35'30"	98°50'30"	69.00	29.00	19.5
Tepotztlán	18°59'00"	99°07'00"	39.95	71.05	127.5
Tequesquitengo	18°35'00"	99°15'15"	26.00	28.20	15.0
Tetela del Volcán	18°52'30"	98°44'30"	79.85	59.50	20.0
Tetelcingo	18°52'00"	98°56'00"	59.30	58.80	6.0
Ticuman	18°45'30"	99°07'00"	30.55	47.10	19.0
Tilzapotlán	18°29'00"	99°18'00"	25.20	17.60	0.0
Tlacotepec	18°48'30"	98°45'00"	78.80	52.90	19.1
Totolapan	18°59'00"	98°55'00"	61.30	71.05	21.0
Tres Cumbres	19°03'30"	99°14'00"	27.75	79.70	80.1
Xicatlacotla	18°34'30"	99°12'00"	31.45	27.20	15.0
Yautepec	18°52'00"	99°04'30"	43.80	58.80	34.0
Yecapixtla	18°53'00"	98°52'00"	67.50	60.00	15.5
Zicatepec	18°39'00"	99°11'30"	32.90	35.60	6.7
Puebla					
Chietla	18°31'00"	98°34'30"	97.30	21.30	14.5
Sta. Cruz Cuauhtentilla	18°55'15"	98°36'30"	93.80	65.80	34.2
Guerrero					
Chaucingo	18°17'30"	99°07'00"	39.55	-4.50	13.0
Distrito Federal					
Ajusco	19°13'00"	99°12'00"	31.45	96.60	21.0
El Guardia	19°08'00"	99°10'00"	35.10	88.60	32.5
Milpa Alta	19°11'00"	99°01'00"	51.30	93.50	4.9
México					
Ecatzingo	18°58'00"	98°44'15"	79.80	72.30	17.6
Malinalco	18°59'30"	99°24'30"	9.25	72.60	0.0
San Pedro Nexopa	19°04'00"	98°43'00"	82.40	82.40	8.3

Debe notarse que la media aritmética es un estimador insesgado. Además, la variancia del error de la estimación es mínima pero con respecto a la hipótesis de independencia estadística de las observaciones. Considerando las 38 estaciones hidrológicas cercanas al Estado de Morelos, la lluvia media es igual a 29.11 mm, con una variancia del error de la estimación igual a 22.73 mm²; este valor debe compararse con la variancia *a priori* de 877.38 mm², pudiendo observarse la reducción de variancia.

Con el método de Thiessen tampoco se considera la estructura espacial de la lluvia, pero si los distintos pesos de las observaciones en función de áreas de influencia (véase ilustración 1). La lluvia media se considera una constante desconocida y, asumiendo independencia estadística de las mediciones, la variancia del error de la estimación es igual a

1. Estaciones consideradas en el cálculo de la lluvia media



$$\sigma_p^2 = s_x^2 \left(\sum_{i=1}^n C_i^2 + \frac{1}{A^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^n C_i}{A} \right) \quad (42)$$

siendo C_i los pesos asociados a los polígonos de Thiessen, los cuales conducen a un estimador insesgado, pero el error de estimación no es de mínima variancia. Usando las 38 estaciones de referencia, la lluvia media es igual a 34.10 mm, con una variancia del error de la estimación igual a 37.16 mm². La variancia asociada al método de Thiessen es siempre mayor que la obtenida mediante el método aritmético, ya que la primera sumatoria de la ecuación (42) es mínima cuando todos los pesos son idénticos entre sí e iguales a 1/n.

Todos los cálculos relativos a Kriging se realizaron con un programa de computadora basado en el programa AKRIP (Kafritsas y Bras, 1981). De acuerdo con el procedimiento para estimar el orden de la FCG descrito anteriormente el mejor orden es $k=1$, lo cual significa que la distribución espacial de la lluvia posee una tendencia lineal. Los parámetros pueden ser estimados minimizando el error cuadrado medio de las variancias Kriging, obteniéndose $C = 0$, $a_1 = -31.54$ y $a_1 = 0$. La integral doble de la ecuación (40) se calculó con un método Monte Carlo (González-Aréchiga, 1987). Finalmente, considerando los 38 puntos, la lluvia media es igual a 30.95 mm, con una variancia del error de la estimación igual a 12.61 mm². Es evidente que la variancia Kriging es mucho menor que la correspondiente a los méto-

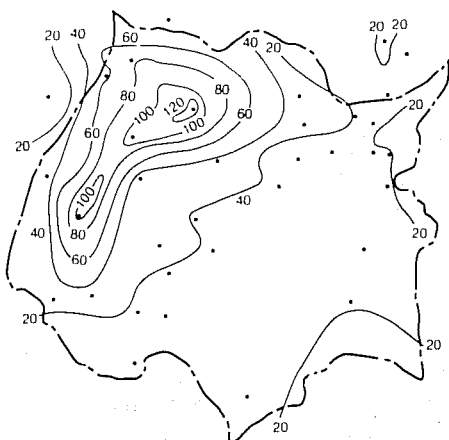
dos aritmético y de Thiessen, ya que al remover la tendencia lineal se tiene una mayor variancia *a priori* explicada (véase cuadro 3).

El método Kriging no sólo permite calcular la lluvia media diaria, sino que puede utilizarse, por ejemplo, para deducir datos faltantes mediante Kriging puntual. Para ello, simplemente se hacen a la FCG los cambios antes mencionados. En la ilustración 2 se muestra un plano de isoyetas convencionales. Con los valores $k=1$, $C=0$, $a_1=-31.54$, $a_3=0$, y empleando los 12 puntos más cercanos a una malla de 100 puntos, en la ilustración 3 se presenta una simulación de las isoyetas. Las variancias del error de la estimación se muestran en la ilustración 4. Si se comparan las ilustraciones 2 y 3, se observa que la superficie predicha es más suave que las isoyetas originales, aun en los puntos de medición. Las isoyetas de 100 y 120 mm no pueden estimarse con Kriging; incluso introduciendo una transformación logarítmica, las variancias del error de la estimación se reducen drásticamente, pero aun así no es posible recuperar la información de las isoyetas de 100 y 120 mm (véanse ilustraciones 5 y 6). Los parámetros de la FCG de los logaritmos de la lluvia son iguales que los del caso sin transformación, excepto que $a_1=-0.122089$.

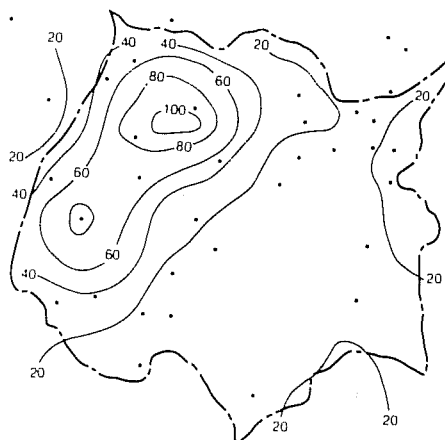
3. Precipitación media en el Estado de Morelos (26 de septiembre de 1967)

Método	Thiessen	Aritmético	Kriging
Estimación (mm)	34.10	29.11	30.95
Variancia del error de la estimación (mm ²)	37.16	22.73	12.61

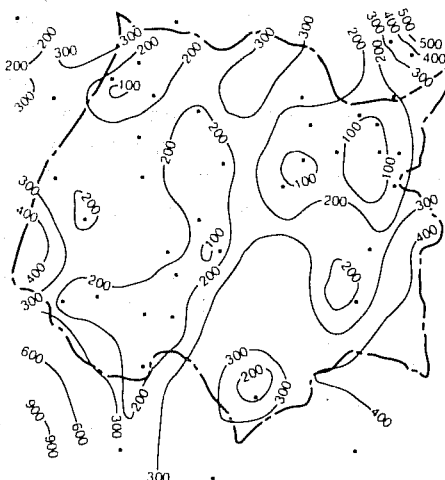
2. Isoyetas del 26 de septiembre de 1967



3. Simulación de isoyetas



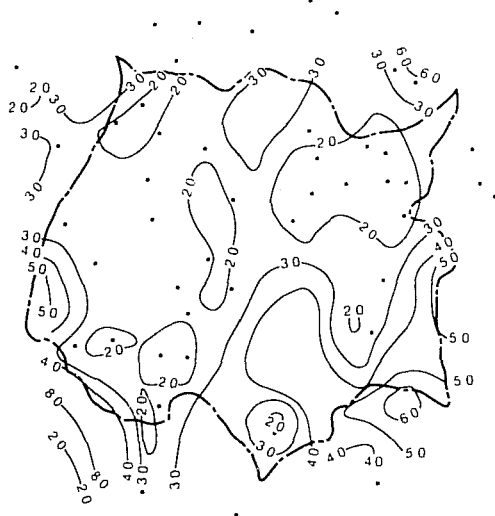
4. Variancia del error de la estimación (de la ilustración 3)



5. Isoyetas con transformación logarítmica



6. Variancia del error de la estimación (de la ilustración 5)



Debe hacerse notar que si se escoge $k = 0$ y $C \neq 0$, los pesos de Kriging coinciden con los del método aritmético. La estimación de la lluvia media así como las variancias del error de la estimación son iguales al utilizar ambos métodos. En este caso, el valor de C es igual al de la variancia *a priori* del proceso, S_x^2 . En la ilustración 7 se muestra la superficie que se obtendría con $k=0$ y $C=877.38$, si se utilizan los ocho puntos más cercanos a una malla de 100 puntos; ello demuestra porqué no es muy confiable estimar la lluvia media con el método aritmético; es decir, la superficie simulada no se parece a la de las isoyetas de la ilustración 2. La variancia del error de la estimación es constante en toda el área e igual a 895 mm^2 , excepto en los puntos de medición donde la

variancia es nula. Estas variancias son enormes comparadas con las de la ilustración 4 e incluso absurdas y si se comparan con las de la transformación logarítmica (véase ilustración 6).

Por último, debe mencionarse que el método Kriging tiene más aplicaciones a problemas hidrológicos y, en general, a problemas geofísicos. McCuen y Snyder (1986), muestran cómo dicho método puede utilizarse para estimar tanto el coeficiente de rugosidad de Manning en un tramo de río, como la humedad del suelo en una parcela, a partir de un conjunto de observaciones. Delhomme (1979) lo aplica a problemas de estimación de transmisividad en acuíferos; Hughes y Lettenmaier (1981) y Bastin *et al* (1984), al diseño de redes de pluviómetros, y Chirlin y Wood (1982), demuestran la relación entre el método Kriging y la estimación de estados dentro del marco de variables de estado.

Conclusiones

A menudo se presentan procesos geofísicos que muestran una estructura espacial y cuyos promedios o valores puntuales se han calculado tradicionalmente sin considerar dicha estructura. El método Kriging es capaz de tomar en cuenta esa variabilidad y de construir un estimador insesgado y de mínima variancia del error de la estimación. En este artículo se han presentado las hipótesis más frecuentes para establecer las ecuaciones Kriging y se ha procurado que éstas se entiendan cabalmente. Se consideró un caso específico con objeto de ilustrar la aplicación del método Kriging para estimar la precipitación media en el Estado de Morelos, y se mostró que permite obtener mejores resultados que la media aritmética y que los polígonos de Thiessen. Además, se mostró que Kriging provee una medida de la variabilidad de las estimaciones mediante la variancia Kriging, esto es, la variancia del error de la estimación. A lo largo del artículo se hace referencia a métodos de identificación y de estimación de parámetros, y se dan sugerencias prácticas para la aplicación del método Kriging.

Referencias

- Bastin, G., Lorent, B., Duqué C., y Gevers. M. "Optimal Estimation of the Average Areal Rainfall and Optimal Selection of Rain Gauge Locations", *Water Resources Research*, 20 (4): 463-470, 1984.
- Bras, R. L., y Rodríguez-Iturbe, I. "Evaluation of Mean Square Error Involved in Approximating the Areal

7 Simulación de isoyetas con $k = 0$ y $C = 877.38$



- Average of a Rainfall Event by a Discrete Summation", *Water Resources Research*, 12 (2): 181-184, 1976.
- Bras, R.L., y Rodríguez-Iturbe, I. "Random Functions and Hydrology, Addison-Wesley, 1985.
- Chirlin, G. R., y Wood, E. F. "On the Relationship Between Kriging and State Estimation", *Water Resources Research*, 18 (2): 432-438, 1982.
- Christakos, G. "On the Problem of Permissible Covariance and Variogram Models", *Water Resources Research*, 20 (2): 251-265, 1984.
- Creutin, J. D., y Obled, C. "Objective Analyses and Mapping Techniques for Rainfall Fields: An Objective Comparison", *Water Resources Research*, 18 (2): 413-431, 1982.
- Cressie, N., y Hawkins, D. M. "Robust Estimation of the Variogram: I", *Mathematical Geology*, 12 (2): 115-125, 1980.
- Delfiner, P. "Linear Estimation of Non-Stationary Spatial Phenomena", en *Advanced Geostatistics in the Mining Industry*, M. Guarascio et al. (eds.) D. Reidel, Dordrecht, Holanda, 1976, pp. 49-68.
- Delhomme, J. P. "Kriging in the Hydrosociences", *Advances in Water Resources*, 1 (5): 251-266, 1978.
- Delhomme, J. P. "Spatial Variability and Uncertainty in Groundwater Flow Parameters: A Geostatistical Approach", *Water Resources Research*, 15 (2): 269-280, 1979.
- Diskin, M. H. "On the Computer Evaluation of Thiessen Weights", *Journal of Hydrology*, 11: 69-78, 1970.
- González-Aréchiga, R. "Aplicación del método Kriging al cálculo de la precipitación pluvial", Tesis Profesional, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente, Guadalajara, Jalisco, enero 1988.
- Green, P. J., y Sibson, R. "Computing Dirichlet Tessellations in the Plane", *Computer Journal*, 21: 168-173, 1978.
- Hughes, J.P., y Lettenmaier, D.P. "Data Requirements for Kriging: Estimation and Network Design", *Water Resources Research*, 17 (6): 1641-1650, 1981.
- Kafritsas, J., y Bras, R.L., "The Practice of Kriging", R. M. Parsons Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Reporte núm. 263, 1981.
- Kitanidis, P. K. "Statistical Estimation of Polynomial Generalized Covariance Functions and Hydrologic Applications", *Water Resources Research*, 19 (4): 909-921, 1983.
- Kitanidis, P. K. y Lane, R. W. "Maximum Likelihood Parameter Estimation of Hydrologic Spatial Processes by the Gauss-Newton Method", *Journal of Hydrology*, 79: 53-71, 1985.
- Linsley, R. K. Jr, Kohler, M. A. y Paulhus, J. L. H. *Hydrology for Engineers*, McGraw-Hill, 1975.
- Matheron, G. "The Theory of Regionalized Variables and its Applications", *Le Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique*, núm. 5, Fontainebleau, Francia, 1971.
- Matheron, G. "The Intrinsic Random Functions and their Applications", *Advances in Applied Probability*, 5: 439-468, 1973.
- McCuen, R. H. y Snyder, W. M. *Hydrologic Modeling: Statistical Methods and Applications*, Prentice-Hall, EUA, 1986.
- Ripley, B. D. *Spatial Statistics*, Wiley, 1981.
- Rouhani, S. "Variance Reduction Analysis", *Water Resources Research*, 21 (6): 837-846, 1985.
- Singh, V. P. y Chowdhury, P. K. "Comparing Some Methods of Estimating Mean Areal Rainfall", *Water Resources Bulletin*, 22 (2): 275-282, 1986.
- Starks, T. H. y Fang, J. H. "On the Estimation of the Generalized Covariance Function", *Mathematical Geology*, 14 (1): 57-64, 1982.
- Whittle, P. "Stochastic Processes in Several Dimensions", *Bulletin of the International Statistical Institute*, 40 (1): 974-994, 1963.

Se agradece la ayuda de Rafael González-Aréchiga Cortés, quien realizó la mayor parte de los cálculos y elaboró las ilustraciones del ejemplo que se presenta en este trabajo.