

Método semi-analítico para la solución de las ecuaciones de Saint-Venant

Nahun Hamed García Villanueva

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, CNA

La simulación del flujo transitorio que se presenta en canales de sección rectangular, se puede realizar por medio de la solución de las ecuaciones de Saint-Venant. En este trabajo se propone un método semi-analítico para llevar a cabo este tipo de simulación; parte de la transformación del sistema de ecuaciones diferenciales parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales pueden integrarse analíticamente al considerar la celeridad constante entre y durante incrementos espaciales y temporales pequeños. De lo anterior, resulta un sistema de ecuaciones cuya solución, para puntos comunes, se puede realizar con auxilio de funciones de correlación. En este artículo se ha incluido la forma de representar diversas condiciones de frontera al aplicar el método propuesto. Como parte final de este trabajo se exponen algunos resultados obtenidos de la simulación numérica de ciertos casos particulares, con lo cual se ilustra la versatilidad del método.

Teoría

En los últimos años, con el advenimiento de mejores computadoras, los investigadores en hidráulica han logrado un gran avance en la comprensión y simulación del flujo transitorio en canales, a tal grado que ya existe un amplio acervo bibliográfico que abarca diferentes métodos y técnicas de solución de las ecuaciones de Saint-Venant. Siguiendo con esta tendencia de investigación y tomando en cuenta la importancia del tema, en este trabajo se propone un método alternativo para la solución de las ecuaciones de Saint-Venant.

El método parte de la transformación del sistema de ecuaciones diferenciales parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales pueden ser integradas analíticamente cuando se considera la celeridad constante entre y durante incrementos pequeños tanto espaciales como temporales; de aquí, el nombre de solución semi-analítica de las ecuaciones de Saint-Venant.

Ecuaciones básicas

Las ecuaciones que describen el flujo transitorio unidimensional a superficie libre, se conocen como ecuaciones de Saint-Venant y en su forma no conservativa se expresan de la manera siguiente:

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial x} = q \quad (1)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_o - S_f) - \frac{qu}{A} \quad (2)$$

si se considera canal prismático de sección rectangular, entonces $A = bh$, por lo que, las ecuaciones (1) y (2) se escriben en la forma:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q}{b} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_o - S_f) - \frac{qu}{bh} \quad (4)$$

$$\frac{dw^-}{dt} = g(S_o - S_f) - \frac{gq}{bc^2}(w^- + 3c) \quad (13)$$

Ecuaciones características

Si se multiplica la ecuación (3) por g y se asigna $c^2 = gh$, las ecuaciones (3) y (4) se transforman, expresándose como:

$$2 \frac{\partial c}{\partial t} + 2u \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{gq}{bc} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + 2c \frac{\partial c}{\partial x} = g(S_o - S_f) - \frac{qug}{bc^2} \quad (6)$$

sumando (5) con (6), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u + 2c) + (u + c) \frac{\partial}{\partial x}(u + 2c) &= g(S_o - S_f) + \\ &+ \frac{gq}{bc} \left[1 - \frac{u}{c} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

y restando (5) de (6), se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u - 2c) + (u - c) \frac{\partial}{\partial x}(u - 2c) &= g(S_o - S_f) - \\ &- \frac{gq}{bc} \left[1 + \frac{u}{c} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Si por otra parte, de la definición de derivada total, se cumple

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (9)$$

y si se asigna

$$w^+ = u + 2c \quad (10)$$

$$w^- = u - 2c \quad (11)$$

entonces, al sustituir (9), (10) y (11) en (7) y (8) se obtiene

$$\frac{dw^+}{dt} = g(S_o - S_f) - \frac{gq}{bc^2}(w^+ - 3c) \quad (12)$$

válida cuando $\frac{dx}{dt} = w^+ - c$

válida cuando $\frac{dx}{dt} = (w^- + c)$

Si, adicionalmente, se acepta como correcta a la expresión de Chezy para evaluar la pendiente de fricción, se tiene que:

$$S_f = \frac{u^2}{K^2 R} = \frac{u^2}{K^2} \left[\frac{1}{h} + \frac{2}{b} \right] \quad (14)$$

si $h = \frac{c^2}{g}$ y $u = w^+ - 2c$

entonces (14) se expresa como

$$S_f = \frac{(w^+ - 2c)^2}{K^2} \left[\frac{g}{c^2} + \frac{2}{b} \right]$$

desarrollando el binomio al cuadrado y factorizando, se obtiene

$$\begin{aligned} S_f &= w^2 \left[\frac{g}{K^2 c^2} + \frac{2}{K^2 b} \right] - w^+ \left[\frac{4g}{K^2 c} + \frac{8c}{K^2 b} \right] + \\ &+ \left[\frac{4g}{K^2} + \frac{8c^2}{K^2 b} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

sustituyendo (15) en (12), el sistema se expresa como

$$\begin{aligned} \frac{dw^+}{dt} &= gS_o - \frac{4g^2}{K^2} - \frac{8gc^2}{K^2 b} + \frac{3gq}{bc} + \\ &+ w^+ \left[\frac{4g^2}{K^2 c} + \frac{8gc}{K^2 b} - \frac{gq}{bc^2} \right] - w^{+2} \left[\frac{g^2}{K^2 c^2} + \frac{2g}{K^2 b} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{dx}{dt} = w^+ - c$$

y al asignar

$$a_0 = gS_o - \frac{4g^2}{K^2} - \frac{8gc^2}{K^2 b} + \frac{3gq}{bc}$$

$$a_1 = \frac{4g^2}{K^2 c} - \frac{8gc^2}{K^2 b} + \frac{gq}{bc^2}$$

$$a_2 = - \left[\frac{g^2}{K^2 c^2} + \frac{2g}{K^2 b} \right]$$

El sistema (16) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{dw^+}{dt} = a_0 + a_1 w^+ + a_2 w^{+2} \quad (17)$$

$$\frac{dx}{dt} = w^+ - c$$

Por otro lado, si se considera ahora

$$h = \frac{c^2}{g} \text{ y } u = w^- + 2c$$

la ecuación (14) se puede expresar en la forma

$$S_f = w^{-2} \left[\frac{g}{K^2 c^2} + \frac{2}{K^2 b} \right] + w^- \left[\frac{4g}{K^2 c} + \frac{8c}{K^2 b} \right] + \left[\frac{4g}{K^2} + \frac{8c^2}{K^2 b} \right] \quad (18)$$

sustituyendo (18) en (13), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dw^-}{dt} = & gS_0 - \frac{4g^2}{K^2} - \frac{8gc^2}{K^2 b} - \frac{3gq}{bc} - \\ & - w^- \left[\frac{4g^2}{K^2 c} + \frac{8gc}{K^2 b} + \frac{gq}{bc^2} \right] - w^{-2} \left[\frac{g^2}{K^2 c^2} + \frac{2g}{K^2 b} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{dx}{dt} = w^- + c$$

y asignando

$$b_0 = gS_0 - \frac{4g^2}{K^2} - \frac{8gc^2}{K^2 b} - \frac{3gq}{bc}$$

$$b_1 = - \left[\frac{4g^2}{K^2 c} + \frac{8gc}{K^2 b} + \frac{gq}{bc^2} \right]$$

$$b_2 = - \left[\frac{g^2}{K^2 c^2} + \frac{2g}{K^2 b} \right]$$

El sistema (19) se puede expresar, finalmente, en la forma

$$\frac{dw^-}{dt} = b_0 + b_1 w^- + b_2 w^{-2} \quad (20)$$

$$\frac{dx}{dt} = w^- + c$$

En resumen, el par original de ecuaciones diferenciales parciales, se ha transformado al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

Característica positiva (c^+)

$$\frac{dw^+}{dt} = a_0 + a_1 w^+ + a_2 w^{+2} \quad (21)$$

válida cuando se satisface

$$\frac{dx}{dt} = w^+ - c \quad (22)$$

Característica negativa (c^-)

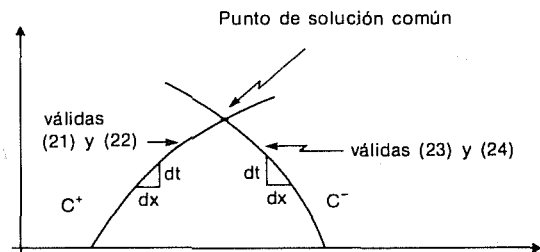
$$\frac{dw^-}{dt} = b_0 + b_1 w^- + b_2 w^{-2} \quad (23)$$

válida cuando satisface

$$\frac{dx}{dt} = w^- + c \quad (24)$$

véase ilustración 1

1. Líneas características



Integración de las ecuaciones características

Aceptando, por simplificación, que c permanece prácticamente constante durante incrementos de tiempo pequeños, entonces las ecuaciones (21) y

(23) son integrables analíticamente, tal y como se muestra a continuación:

multiplicando y dividiendo por -1 los miembros derechos de las ecuaciones (21) y (23), se obtiene:

$$dt = -\frac{dw^+}{(-a_2 w^{+2} - a_1 w^+ - a_0)} \quad (25)$$

$$dt = -\frac{dw^-}{(-b_2 w^{-2} - b_1 w^- - b_0)} \quad (26)$$

si se define

$$A = 4 \ a_0 \ a_2 - a_1^2$$

$$B = 4 \ b_0 \ b_2 - b_1^2$$

Se tiene que las integrales indefinidas, de las ecuaciones (25) y (26), resultan ser:

$$t = \frac{-1}{\sqrt{-A}} \ln \left[\frac{-2a_2 w^+ - a_1 - \sqrt{-A}}{-2a_2 w^+ - a_1 + \sqrt{-A}} \right] + K_1^+,$$

siendo $A < 0$

$$t = \frac{-1}{\sqrt{-B}} \ln \left[\frac{-2b_2 w^- - b_1 - \sqrt{-B}}{-2b_2 w^- - b_1 + \sqrt{-B}} \right] + K_1^-,$$

siendo $B < 0$

donde K_1^+ y K_1^- son constantes de integración.

A fin de expresar en forma más compacta estas ecuaciones, se denota,

$$R_1^+ = -a_1 - \sqrt{-A}, \quad R_2^+ = -a_1 + \sqrt{-A}$$

$$R_1^- = -b_1 - \sqrt{-B}, \quad R_2^- = -b_1 + \sqrt{-B}$$

por lo tanto, se obtiene

$$t = \frac{-1}{\sqrt{-A}} \ln \left[\frac{-2a_2 w^+ + R_1^+}{-2a_2 w^+ + R_2^+} \right] + K_1^+ \quad (27)$$

$$t = \frac{-1}{\sqrt{-B}} \ln \left[\frac{-2b_2 w^- + R_1^-}{-2b_2 w^- + R_2^-} \right] + K_1^- \quad (28)$$

de estas ecuaciones es factible despejar w^+ y w^- , obteniéndose

$$w^+ = \frac{R_1^+ - R_2^+ e^{\sqrt{-A}(K_1^+ - t)}}{2a_2 \left[1 - e^{\sqrt{-A}(K_1^+ - t)} \right]} \quad (29)$$

$$w^- = \frac{R_1^- - R_2^- e^{\sqrt{-B}(K_1^- - t)}}{2b_2 \left[1 - e^{\sqrt{-B}(K_1^- - t)} \right]} \quad (30)$$

este par de ecuaciones permite, una vez conocidos K_1^+ y K_1^- , determinar w^+ y w^- para todo t .

Adicionalmente, si se sustituye (29) en (22) y (30) en (24), se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{R_1^+ - R_2^+ e^{\sqrt{-A}(K_1^+ - t)}}{2a_2 \left[1 - e^{\sqrt{-A}(K_1^+ - t)} \right]} - c \quad (31)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{R_1^- - R_2^- e^{\sqrt{-B}(K_1^- - t)}}{2b_2 \left[1 - e^{\sqrt{-B}(K_1^- - t)} \right]} + c \quad (32)$$

Estas ecuaciones se pueden manipular algebraicamente de tal manera que se pueden presentar en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & \frac{R_1^+ e^{\sqrt{-A} t}}{2a_2 \left[e^{\sqrt{-A} t} - e^{\sqrt{-A} K_1^+} \right]} - \\ & - \frac{R_2^+ e^{\sqrt{-A} K_1^+}}{2a_2 \left[e^{\sqrt{-A} t} - e^{\sqrt{-A} K_1^+} \right]} - c \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & \frac{R_1^- e^{\sqrt{-B} t}}{2b_2 \left[e^{\sqrt{-B} t} - e^{\sqrt{-B} K_1^-} \right]} - \\ & - \frac{R_2^- e^{\sqrt{-B} K_1^-}}{2b_2 \left[e^{\sqrt{-B} t} - e^{\sqrt{-B} K_1^-} \right]} + c \end{aligned} \quad (34)$$

si se considera c constante, estas ecuaciones son integrables analíticamente, obteniéndose:

$$X^+ = \frac{(R_1^+ - R_2^+)}{2a_2 \sqrt{-A}} \ln \left[e^{\sqrt{-A} t} - e^{\sqrt{-A} K_1^+} \right] +$$

$$+ \frac{R_2^+}{2a_2} t - ct + K_2^+ \quad (35)$$

$$X^- = \frac{(R_1^- - R_2^-)}{2b_2\sqrt{-B}} \ln \left[e^{\sqrt{-B} t} - e^{\sqrt{-B} K_1^-} \right] + \frac{R_2^-}{2b_2} t - ct + K_2^- \quad (36)$$

si por condición inicial para $t = 0$, X^+ y X^- son iguales a X_0^+ y X_0^- en el rango $0(X) < L$, entonces al sustituir en (35) y (36) se tiene que:

$$K_2^+ = X_0^+ - \frac{(R_1^+ - R_2^+)}{2a_2\sqrt{-A}} \ln \left[1 - e^{\sqrt{-A} K_1^+} \right] \quad (37)$$

$$K_2^- = X_0^- - \frac{(R_1^- - R_2^-)}{2b_2\sqrt{-B}} \ln \left[1 - e^{\sqrt{-B} K_1^-} \right] \quad (38)$$

sustituyendo (37) y (38) en (35) y (36) respectivamente, se obtiene

$$X^+ = X_0^+ - \frac{1}{a_2} \ln \left[\frac{e^{\sqrt{-A} t} - e^{\sqrt{-A} K_1^+}}{1 - e^{\sqrt{-A} K_1^+}} \right] + \frac{R_2^+}{2a_2} t - ct \quad (39)$$

$$X^- = X_0^- - \frac{1}{b_2} \ln \left[\frac{e^{\sqrt{-B} t} - e^{\sqrt{-B} K_1^-}}{1 - e^{\sqrt{-B} K_1^-}} \right] + \frac{R_2^-}{2b_2} t + ct \quad (40)$$

por lo tanto, este par de ecuaciones permite, una vez conocidos K_1^+ y K_1^- , determinar X^+ y X^- para todo t .

Para evaluar K_1^+ y K_1^- se recurre a las ecuaciones (27) y (28), en las cuales para $t = 0$, se tiene que $w^\pm = w^\pm(0, X_0^\pm)$, o sea que dependen del perfil de flujo inicial, por lo tanto,

$$K_1^+ = \frac{1}{\sqrt{-A}} \ln \left[\frac{-2a_2 w^+(0, X_0^+) + R_1^+}{-2a_2 w^+(0, X_0^+) + R_2^+} \right] \quad (41)$$

$$K_1^- = \frac{1}{\sqrt{-B}} \ln \left[\frac{-2b_2 w^-(0, X_0^-) + R_1^-}{-2b_2 w^-(0, X_0^-) + R_2^-} \right] \quad (42)$$

Lo anterior indica que, una vez conocido el perfil del flujo inicial, es factible determinar K_1^+ y K_1^- para posteriormente, dado un incremento de tiempo pequeño, calcular w^+ , w^- , X^+ y X^- con auxilio de las ecuaciones (29), (30), (39) y (40), respectivamente. Esto permite una integración a lo largo de las características positivas (c^+) y negativas (c^-) independientemente, para el mismo intervalo de tiempo.

Sin embargo, lo que interesa en la práctica es encontrar la solución simultánea de todo el sistema de ecuaciones, o sea, los valores de w^+ y w^- correspondientes a puntos comunes (X, t). Para lograr esto se propone seguir la siguiente secuencia de cálculo:

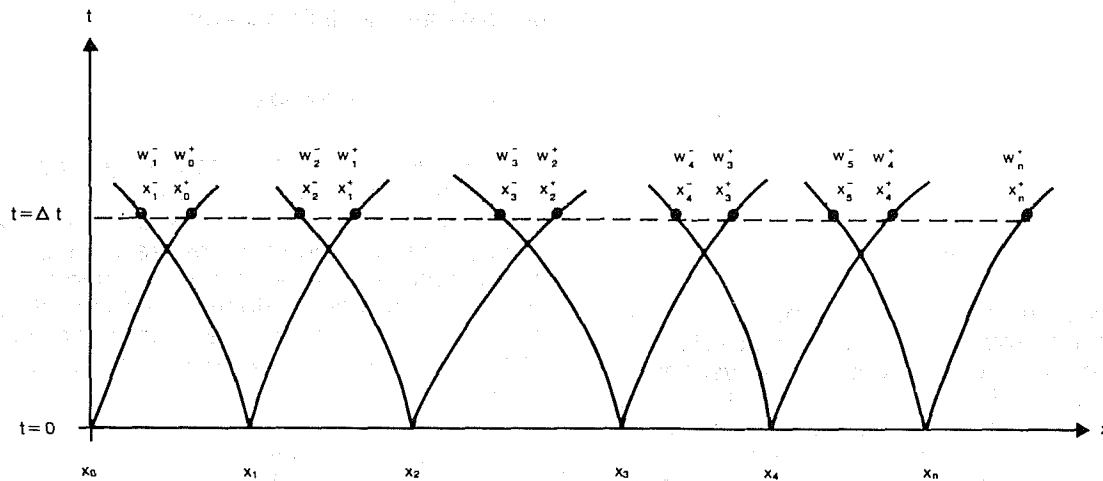
- Sea conocido el perfil de flujo para el tiempo $t = 0$, en un canal de longitud L . Esto implica conocer $w^\pm(0, X_0^\pm)$ para toda X .
- Se propone $t = \Delta t$, y se adopta cualquier valor de X comprendido en el intervalo $0(X) < L$, entonces al asignar $X_0^+ = X_0^- = X$ es factible calcular w^+ , w^- , X^+ y X^- con auxilio de las ecuaciones (29), (30), (39) y (40).
- Si se toman n valores de X en el inciso b, se obtendrá una cantidad igual de valores calculados de w^+ , w^- , X^+ y X^- , correspondientes al tiempo $t = \Delta t$, tal y como se indica en la ilustración 2.
- Como puede observarse en la ilustración 2, en general, los valores de X^+ y X^- no son iguales y, por lo tanto, los valores de w^+ y w^- tampoco son solución para un mismo punto común.

Con objeto de conocer los valores de w^+ y w^- correspondientes a puntos (X, t) comunes, se propone recurrir a técnicas de correlación, de tal manera que se cuente con dos relaciones del tipo (43) y (44), donde al sustituir $X^+ = X^- = X$ se obtendrán los valores de w^+ y w^- correspondientes a un punto común (X, t), con lo cual se pueden obtener los valores de w y c correspondientes al mismo.

$$w^+ = f_1(x^+), \text{ para } t = \Delta t \quad (43)$$

$$w^- = f_2(x^-), \text{ para } t = \Delta t \quad (44)$$

2. Cálculo numérico en puntos centrales



- e) Es obvio que si en el paso (d) se sustituyen n valores de X se podrá definir el nuevo perfil del flujo correspondiente al tiempo $t = \Delta t$.
- f) Una vez conocido el nuevo perfil correspondiente a $t = \Delta t$, si se desea conocer el perfil que presentará un incremento de tiempo después, entonces el nuevo perfil calculado se toma como perfil inicial correspondiente a $t = 0$ y se repiten los pasos (b) a (e).

Para definir las funciones $y f_1(x^+)$ y $f_2(x^-)$ del paso (d) se recomienda utilizar trazadores del tipo cúbico o lineal, tal como se muestra en el siguiente apartado, donde adicionalmente se analizan algunas condiciones de frontera.

Condiciones de frontera

Si bien en el desarrollo de todo modelo numérico para la simulación de algún fenómeno físico es muy importante la forma en que se representan y aproximan las ecuaciones fundamentales, no menos importante es la adecuada simulación de las condiciones iniciales y de frontera. Atendiendo a este aspecto, en este apartado se presenta la manera en que se deben considerar y simular diversas condiciones de frontera comunes en algunos problemas sobre transitorios hidráulicos en canales. Antes de iniciar el estudio de las condiciones de frontera, es recomendable recordar las siguientes relaciones, vistas en la primera parte de este trabajo:

$$w_i^+ = u_i + 2c_i \quad (45)$$

$$w_i^- = u_i - 2c_i \quad (46)$$

$$u_i = \frac{w_i^+ + w_i^-}{2} \quad (47)$$

$$c_i = \frac{w_i^+ - w_i^-}{4} \quad (48)$$

$$h_i = \left[\frac{g}{4} (w_i^+ - w_i^-) \right]^{1/2} \quad (49)$$

y adicionalmente adoptar las funciones de correlación siguientes:

$$w_i^+ = a_i^+ + b_i^+ [X - X_i^+] \quad ; \quad X_i^+ \leq X \leq X_{i+1}^+ \quad (50)$$

$$w_i^- = a_i^- + b_i^- [X - X_i^-] \quad ; \quad X_i^- \leq X \leq X_{i+1}^- \quad (51)$$

que expresan la evaluación de w_i^+ y w_i^- en la posición común X donde, para $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$a_i^+ = w_i^+ \text{ evaluada en } X_i^+$$

$$a_i^- = w_i^- \text{ evaluada en } X_i^-$$

$$b_i^+ = \frac{w_{i+1}^+ - w_i^+}{X_{i+1}^+ - X_i^+} \text{ evaluando } w_{i+1}^+ \text{ en } X_{i+1}^+ \text{ y } w_i^+ \text{ en } X_i^+$$

$$b_i^- = \frac{w_{i+1}^- - w_i^-}{X_{i+1}^- - X_i^-} \text{ evaluando } w_{i+1}^- \text{ en } X_{i+1}^- \text{ y } w_i^- \text{ en } X_i^-$$

Tirante crítico aguas arriba

Esta condición se podría presentar, por ejemplo, en el inicio de una rápida o canal de alta velocidad y puede ocurrir a gasto constante o variable a través del tiempo; siendo este caso uno de los más generales, su simulación se estudia a continuación:

Sea $Q_0 = Q(t)$ el gasto conocido que se presenta en una sección crítica ubicada aguas arriba de un canal, entonces se debe cumplir la relación

$$h_0^3 = \frac{Q_0^2}{gb^2} \quad (52)$$

sustituyendo (49) en (52) considerando $i = 0$, se obtiene

$$\sqrt{\frac{g}{4}} [w_0^+ - w_0^-]^{1/2} = \left[\frac{Q_0^2}{gb^2} \right]^{1/3} \quad (53)$$

despejando w^+ de (53)

$$w_0^+ = w_0^- + \frac{4Q_0^{4/3}}{g^{8/3}b^{4/3}} \quad (54)$$

Adicionalmente, de las ecuaciones (45) y (46), es fácil demostrar que para sección crítica siendo $n = \delta$ se cumple la relación

$$w_0^- = -\frac{w^+}{3} \quad (55)$$

De tal manera que al sustituir (55) en (56) y despejar w^+ , se llega a

$$w_0^+ = \frac{3Q_0^{4/3}}{g^{8/3}b^{4/3}} \quad (56)$$

Por lo tanto, en conclusión, para simular esta condición de frontera basta calcular, para cada intervalo de tiempo considerado, w_0^+ con la relación (56) y posteriormente w_0^- con la (55). Es importante tener en cuenta que conociendo w^+

y w^- en un punto común, es factible determinar las características hidráulicas de la sección que representan por medio de las ecuaciones (49), (50) y (51). Es obvio que este caso se presenta únicamente para flujo supercrítico.

Tirante crítico aguas abajo

Esta situación es muy común en canales de pendiente suave (flujo subcrítico) que descargan a una rápida o caída libre. En esta frontera se debe cumplir con la condición de sección de control crítica, para la cual se cumple la relación (55). Si por otra parte con el algoritmo general de cálculo es factible conocer para el tiempo de interés el valor de W_n^+ en el extremo final del canal con la expresión

$$w_n^+ = a_i^+ + b_i^+ (L - X_i^+), \quad X_i^+ \leq L \leq X_{i+1}^+ \quad (57)$$

Donde L es la longitud total del surco. Es importante hacer notar que en estos casos $i = n-1$ siendo n el número total de secciones en que se ha dividido el canal (n es igual numéricamente al número de sectores (ΔX) en que se tiene dividido el canal +1)

En conclusión, para simular esta condición de frontera se calcula w_n^+ con la relación (57) y posteriormente w_n^- con la expresión (55), o sea

$$w_n^- = -\frac{w_n^+}{3}$$

Variación del gasto de aportación en un canal trabajando a flujo subcrítico

Esta condición se presenta comúnmente en canales en que se debe transitar un hidrograma, lo cual sucede en la práctica continuamente en ríos y canales de riego. En esta frontera se conoce la relación gasto (Q_0)-tiempo, y adicionalmente se deberá satisfacer la ecuación de continuidad

$$Q_0 = b h_0 u_0 \quad (58)$$

Recordando que

$$c = \sqrt{gh}$$

$$\text{Se tendrá } h_0 = c_0^2/g \quad (59)$$

Por lo tanto, al sustituir (59) en (58), se obtiene

$$Q_0 = \frac{b}{g} c_0^2 u_0 \quad (60)$$

si adicionalmente de (47) y (48), se cumple

$$w_0 = (w_0^+ + w_0^-)/2 \quad (61)$$

$$c_0 = (w_0^+ - w_0^-)/4 \quad (62)$$

Al sustituir (61) y (62) en (60), se obtiene

$$Q_0 = \frac{b}{32g} \left[w_0^+ + w_0^- \right] \left[w_0^+ - w_0^- \right]^2 \quad (63)$$

Operando algebraicamente, la expresión (63) se puede expresar en la forma

$$w_0^{+3} - w_0^{+2} w_0^- - w_0^+ w_0^{-2} = \frac{32gQ_0}{b} - w_0^{-3} \quad (64)$$

Ecuación en la cual w_0^+ es la incógnita, ya que los demás términos son conocidos. Se dice que w_0^- es conocida, ya que se puede evaluar con la expresión

$$w_0^- = a_i^- + b_i^- \left[0 - X_i^- \right] ; X_i^- \leq 0 \leq X_{i+1}^- \quad (65)$$

En conclusión, se puede indicar que el cálculo en esta frontera se lleva a cabo determinando w_0^- con auxilio de la relación (65) y posteriormente w_0^+ al solucionar numéricamente la ecuación (64), para lo cual se recomienda utilizar el método de la secante o el de Newton-Raphson.

Variación del tirante aguas arriba en flujo subcrítico

Este caso puede suceder en un canal que esté alimentado por un almacenamiento (laguna, mar, presa, etc.), en el cual se presenta oleaje.

Sea $h_0 = h(t)$ el tirante conocido, que se presenta en la sección inicial del canal, por lo tanto de acuerdo con la ecuación (49) se debe cumplir

$$h_0 = \sqrt{\frac{g}{4}} \left[w_0^+ - w_0^- \right]^{1/2}$$

despejando w_0^+ , se obtiene

$$w_0^+ = w_0^- + \frac{4h_0^2}{g} \quad (66)$$

adicionalmente, de la misma manera que para el caso de variación del gasto de aportación en un canal trabajando a flujo subcrítico, se tiene que

$$w_0^- = a_0^- + b_0^- (0 - X_0^-) \quad (67)$$

por lo tanto, la simulación se lleva a cabo calculando W_0^- con (67) y posteriormente W_0^+ con (68).

Variación del tirante aguas abajo

Esta condición se podría presentar cuando el canal descarga a un almacenamiento en el cual existe oleaje.

Sea $h_n = h(t)$, el tirante, conocido, que se presenta en la sección final del canal, por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (49), se debe cumplir

$$h_n = \sqrt{\frac{g}{4}} \left[w_n^+ - w_n^- \right]^{1/2}$$

despejando w_n^-

$$w_n^- = w_n^+ - \frac{4h_n^2}{g} \quad (68)$$

Adicionalmente, para el tiempo de interés, se conoce w_n^+ por medio de la relación de correlación (50) considerando $i = n-1$, o sea que:

$$w_n^+ = a_i^+ + b_i^+ \left[L - X_i^+ \right] , X_i^+ \leq L \leq X_{i+1}^+ \quad (69)$$

En conclusión, la simulación se realiza calculando w_n^+ con la (69) y posteriormente w_n^- con la (68).

Avance hipotético del frente de onda con una cierta velocidad prefijada

Este tipo de frontera puede ser empleado para la simulación hipotética del frente de avance del flujo originado por el rompimiento de un bordo o para simular la fase de avance durante el riego en melgas o surcos. En estos casos es común considerar que la onda avanza durante un incremento de tiempo con una velocidad igual a la que tenía el flujo al inicio de dicho intervalo.

Sea V_n la velocidad del frente de onda al inicio de un cierto intervalo de tiempo. Se determina la nueva posición del frente de onda X_f con la siguiente expresión

$$X_f = X(n) + V_n \Delta t \quad (70)$$

Es importante notar que en este caso la longitud de la región de flujo se incrementa una distancia igual a $V_n \Delta t$, por lo tanto en cada intervalo de tiempo el

número de secciones también se incrementará en una sección; en consecuencia se deberá hacer

$$n = n + 1$$

$$X_n = X_f$$

una vez habiendo hecho esto, se calcula

$$w_n^+ = a_{n-2}^+ + b_{n-2}^+ [X_n - X_{n-2}^+] \quad (71)$$

$$w_n^- = a_{n-2}^- + b_{n-2}^- [X_n - X_{n-2}^-] \quad (72)$$

En conclusión, para la simulación en cada intervalo de tiempo, se calcula X_f con la (70), se asigna $n = n+1$, $X_n = X_f$ y posteriormente se determinan w_n^+ y w_n^- con auxilio de las ecuaciones (71) y (72).

Es importante notar que esta simulación es correcta cuando el flujo es supercrítico, ya que en este caso la pendiente, tanto de la curva característica positiva como la de la negativa, es positiva. Además, se debe cuidar que el intervalo de tiempo empleado cumpla con la siguiente condición

$$\frac{X_n - X_{n-1}}{V_n + c_n} \geq \Delta t \geq \frac{X_n - X_{n-1}}{V_n}$$

Donde n es la correspondiente al inicio del intervalo, o sea, la correspondiente a la región de flujo antes del incremento espacial. Este aspecto es muy importante, ya que respetando estas condiciones se satisface la condición de Courant y se evitan problemas por extrapolación numérica.

Retroceso hipotético del frente de onda

Este caso puede ser utilizado para la simulación del frente de retroceso hacia aguas arriba originado por el rompimiento de bordo. Se considera que inicialmente todas las secciones aguas arriba del bordo tienen el mismo nivel y que al producirse una ruptura instantánea se forma también al momento una sección crítica en la posición de ubicación del bordo, por lo tanto, las condiciones iniciales del problema estarán dadas, para $t = 0$, considerando que todas las secciones aguas arriba de la posición del bordo tienen el mismo nivel a excepción de su propia sección donde se tiene una sección crítica.

Otra consideración para la simulación es que el gasto en la sección del bordo permanece constante y se mantiene una sección crítica fija (como en el tirante crítico aguas abajo), o una suposición más adecuada es la de avance

hipotético del frente de onda (como en el avance hipotético del frente de onda con una cierta velocidad prefijada).

Con respecto a la onda de retroceso, basta realizar la simulación de puntos intermedios manteniendo tirante constante (variación del tirante aguas arriba en un canal a flujo subcrítico), aguas arriba, con lo cual el modelo simulará la forma en que se produce el avance de la onda hasta alcanzar la sección inicial. Es obvio que el número de secciones ubicadas aguas arriba de la sección del bordo dependerá de la distancia o longitud del embalse que se considere. Vale la pena indicar que este caso es muy interesante y corresponde hipotéticamente al fenómeno de rompimiento de presa en su simulación total, cuando se considera avance hipotético del frente de onda (como en el caso del avance hipotético del frente de onda con una cierta velocidad prefijada).

Compuerta aguas abajo de un canal de pendiente suave

Esta situación se presenta comúnmente en la operación hidráulica del sistema de canales en los distritos de riego. Cabe resaltar que este tipo de condición de frontera tiene una importancia práctica muy importante, ya que de la adecuada operación de las compuertas depende, en muchos de los casos, el buen funcionamiento del sistema de canales. Para el análisis se considerará que la apertura de la compuerta (a) siempre es menor al valor del tirante crítico, con lo que se tendrá flujo subcrítico inmediatamente aguas arriba de la compuerta y flujo supercrítico hacia aguas abajo.

En estos casos se puede aceptar como válida la ecuación de descarga de un orificio, o sea:

$$Q_n = cd A_0 \sqrt{2gh_n} \quad (73)$$

siendo

cd El coeficiente de descarga y

A_0 El área de apertura de la compuerta

Si se considera canal rectangular y de acuerdo con la ecuación de continuidad la expresión (73), se puede expresar también de la siguiente manera:

$$u_n \sqrt{gh_n} = \frac{cd A_0 \sqrt{2g}}{b}$$

$$u_n c_n = \frac{cd A_0 \sqrt{2g}}{b} \quad (74)$$

y recurriendo a las relaciones (47) y (48), la ecuación (74) se expresa como

$$\left[\frac{w_n^+ + w_n^-}{2} \right] \left[\frac{w_n^+ - w_n^-}{4} \right] = \frac{cd A_0 \sqrt{2} g}{b}$$

$$w_n^{+2} - w_n^{-2} = \frac{8 cd A_0 \sqrt{2} g}{b}$$

Despejando w_n^-

$$w_n^- = \pm \sqrt{w_n^{+2} - \frac{8 cd A_0 \sqrt{2} g}{b}} \quad (75)$$

Siendo que el flujo es subcrítico, se toma el signo negativo que es el que tiene significado físico.

Adicionalmente w_n^+ puede ser valuado con la expresión

$$w_n^+ = a_i^+ + b_i^+ [L - X_i^+] \quad , \quad X_i^+ \leq L \leq X_{i+1}^+ \quad (76)$$

En conclusión, para la simulación se calcula w_n^+ con la relación (76) y w_n^- con la (75).

Es importante hacer notar que cd es una función de la apertura de la compuerta, y que esta misma apertura puede variar a través del tiempo, por lo que se puede indicar que el segundo término del radical de la ecuación (75) es una función del tiempo y dependerá de la operación que se realice con la compuerta.

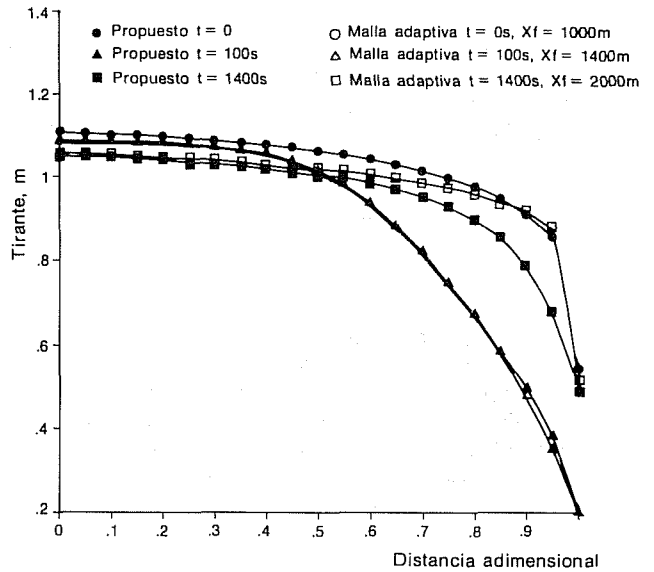
Ejemplos

A fin de mostrar la bondad del método propuesto, se exponen los resultados de dos problemas sobre avance de flujo en canales y otro sobre el transitorio producido por el incremento de gasto al inicio de un canal de pendiente suave que descarga libremente a la atmósfera.

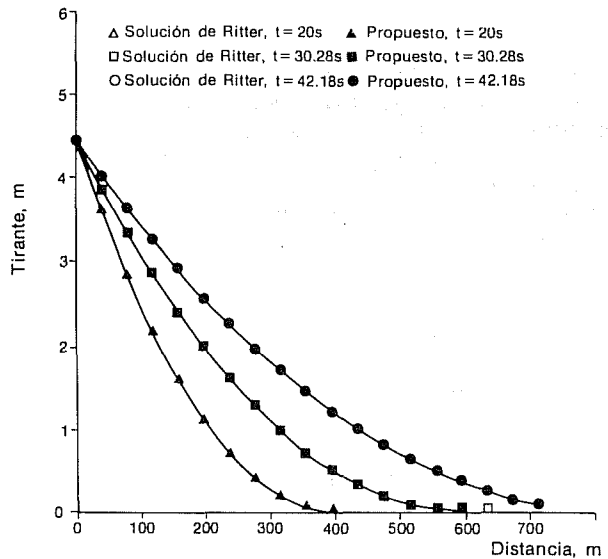
Avance hipotético de la sección crítica

En este caso se considera que por condición inicial se tienen un canal rectangular de ancho $b = 1$, una región de flujo formada por un perfil M2 con una longitud de 1000 m, medidos desde el inicio del canal; a partir de esta condición, se inicia el desplazamiento de la región de flujo hacia aguas abajo con una velocidad del frente de onda igual a $v_n + c_n$, manteniendo en dicho frente una sección crítica, hasta alcanzar una distancia de 2000 m, donde se tiene una caída, produciéndose al llegar a esta sección un remanso hacia aguas arriba que generará una nueva condición estacionaria.

3. Avance hipotético de la sección crítica



4. Romplimiento de bordo



En la ilustración 3 se muestran los resultados obtenidos de la simulación y su comparación numérica con respecto a los obtenidos con el modelo de malla adaptativa propuesto por Martínez y Aldama (1988).

Los datos complementarios utilizados en este problema son:

$$\begin{aligned} K &= 64 \\ S_0 &= 0.001 \\ Q &= 1.25 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Este problema fue originalmente planteado por Martínez y Aldama para probar el modelo de malla adaptativa.

Rompimiento de bordo

Se presenta un caso hipotético de rompimiento de bordo en un canal horizontal, rectangular y sin fricción, para el cual existe solución analítica. En esta simulación se considera por condición inicial los siguientes datos:

Datos al inicio del canal para $t \geq 0$

$$h_0 = 4.444 \text{ m}$$

$$Q_0 = 58.687 \text{ m}^3/\text{s}$$

El ancho del canal es de 2m y se conoce el perfil del flujo, basado en la solución analítica de Ritter, para los primeros 20. La simulación se lleva a cabo hasta un tiempo de 120 segundos. En la ilustración 4, se muestra una comparación de resultados entre el método propuesto y la solución analítica para dos tiempos diferentes.

Variación de gasto

Se desea simular el flujo transitorio que se presenta en un canal rectangular de 1000 m de longitud, que descarga libremente a la atmósfera y el cual posee un coeficiente de rugosidad de Chezy igual a 64 y una pendiente de plantilla igual a 0.001. El flujo transitorio es generado por un incremento de gasto al inicio del canal de acuerdo con la siguiente ley de variación

$$Q = 1.25 \text{ m}^3/\text{s}, t \leq 0$$

$$Q = 1.25 + 0.002t \text{ m}^3/\text{s}, 0 \leq t \leq 500$$

$$Q = 2.25 \text{ m}^3/\text{s}, t \geq 500$$

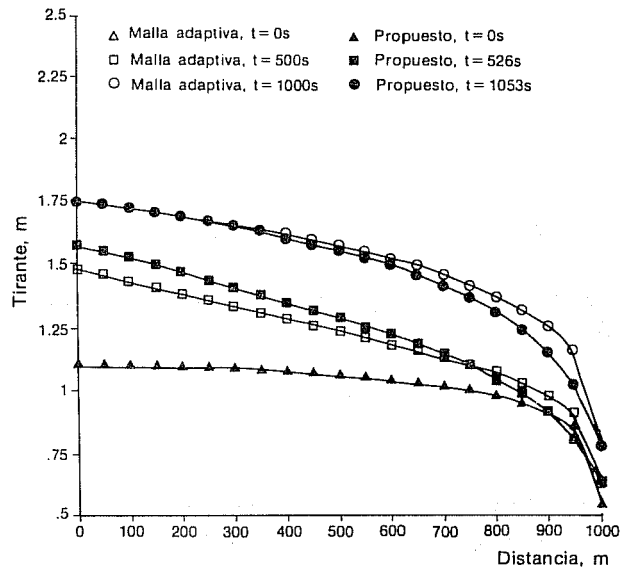
Dadas estas condiciones de Ley de gastos, se tiene como condición inicial un perfil M2 con los siguientes datos.

Sección	Distancia (m)	h(m)	u(m/s)
1	0	1.106	1.13
2	100	1.101	1.135
3	200	1.095	1.141
4	300	1.087	1.15
5	400	1.077	1.161
6	500	1.063	1.176
7	600	1.043	1.198
8	700	1.016	1.230
9	800	0.976	1.281
10	900	0.910	1.376
11	1000	0.540	2.306

Los resultados de la simulación se pueden apreciar en la ilustración 5. Obsérvese que los

resultados del método propuesto comparados con los obtenidos con el modelo en diferencias finitas para malla adaptiva (Martínez y Aldama, 1988), son prácticamente iguales, lo cual es representativo de la bondad del algoritmo de cálculo que se propone.

5. Simulación numérica



Conclusiones

Se ha presentado un algoritmo completamente original y de fácil programación; una de sus principales ventajas es, sin lugar a dudas, su facilidad para modificar sus condiciones de frontera, lo cual lo hace muy versátil. Tal vez una de las principales desventajas del método es la necesidad inherente de respetar en cada intervalo de cálculo el número de Courant, lo que conduce a utilizar incrementos de tiempo pequeños y genera tiempos de máquina relativamente mayores a los requeridos al aplicar técnicas en diferencias finitas para la simulación de un mismo problema. No obstante, la calidad de los resultados justifica su aplicación.

Nomenclatura

- A área hidráulica, m^2
- u velocidad media, m/s
- c celeridad, m/s
- h tirante, m
- Q gasto, m^3/s
- t tiempo, s
- b ancho del canal, m
- k coeficiente de Chezy

S_0 pendiente de plantilla del canal
 S_f pendiente de fricción
 g aceleración de la gravedad, m/s²
 X coordenada longitudinal, m
 V_n velocidad del frente de onda, m/s
 q gasto de infiltración, m³/s/m
 R radio hidráulico, m
 P perímetro mojado, m

Bibliografía

- Abbott, M.B. *Computational Hydraulics*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1979.
- Abbott, M.B. y J.A. Cunge. *Engineering applications of Computational Hydraulics*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1982.
- Cunge, J.A., F.M. Holly, Jr. y A. Verwey. *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman Advanced, Publishing Program, Boston, 1980.
- Henderson, *Open Channel Flow*, Mc Millan Series in Civil Engineering, Nueva York, 1966.
- Martínez A.P. y Aldama R.A. "Esquema de Malla Adaptiva para la Solución de las Ecuaciones de Saint-Venant con Frontera Móvil", XIV Congreso ANIAC, México, 1988.
- Vente Chow. *Hidráulica de los canales abiertos*, Diana, México, 1982.