

Análisis de gastos máximos aguas abajo de confluencias de ríos

José Angel Raynal Villaseñor

Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma de Chihuahua

El análisis de frecuencias de gastos máximos aguas abajo de las confluencias de los ríos, cuando hay información disponible aguas arriba de la confluencia, sólo ha sido realizado para los casos de completa dependencia o completa independencia. En este artículo se explora el caso de dependencia parcial a través del uso de modelos probabilísticos basados en la aplicación de distribuciones bivariadas extremas (modelo logístico). Dicha aplicación muestra el grado de aproximación que tiene el modelo con respecto al fenómeno real y establece la habilidad de aquél para representar a éste.

El problema de cómo modelar análisis de gastos máximos aguas abajo de la confluencia de dos ríos, cuando hay información disponible aguas arriba de la confluencia, ha sido estudiado por Linsley y Franzini (1979) y Salas (1980). Estos autores supusieron la completa dependencia o la completa independencia como únicas opciones entre gastos máximos medidos en los sitios disponibles, y sus análisis se basaron en esquemas empíricos.

Gumbel (1961) fue quien primero sugirió el uso de convoluciones en hidrología y su principal aplicación radicó en el proceso de identificar cuál de los modelos diferenciables para distribuciones bivariadas de valores extremos, era el más adecuado para las muestras de los datos por analizar. Gumbel partió de la propiedad de que la diferencia entre dos variables aleatorias organizadas de acuerdo con una distribución de valores extremos tipo I y según otra distribución bivariada de valores extremos tipo logístico, tiene una distribución logística. Salas, Rueda y Raynal (1983) y Raynal (1985) describieron el uso de las distribuciones bivariadas de valores extremos con marginales con una distribución de valores extremos tipo I para analizar las de frecuencias de gastos máximos.

Para construir un modelo que describa aproximadamente la distribución de los gastos máximos aguas abajo de la confluencia de dos ríos, se usa la integral

de convolución y la aplicación práctica del modelo se muestra con un caso de estudio específico.

Distribución bivariada de valores extremos tipo II

La forma general del modelo logístico de las distribuciones bivariadas de valores extremos para máximos es (Gumbel, 1960):

$$F(x, y, m) = \exp\{-[(-\ln F(x))^m + (-\ln F(y))^m]^{1/m}\} \quad (1)$$

donde $F(x, y, m)$ es la distribución bivariada de x e y ; m , el parámetro de asociación y $F(\cdot)$, la distribución de valores extremos marginales de $(\cdot)$ y $m \geq 1$.

Cuando las marginales tienen una distribución de valores extremos tipo I, el modelo general (1) proporciona la distribución bivariada de valores extremos tipo II, (Raynal, 1985):

$$F(x, y, m) = \exp\{-[\exp(-m(x - u_1)/\alpha_1) + \exp(-m(y - u_2)/\alpha_2)]^{1/m}\} \quad (2)$$

con función de densidad:

$$f(x, y, m) = (1/\alpha_1\alpha_2) \exp(-m(x - u_1)/\alpha_1) \exp(-m(y - u_2)/\alpha_2) [\exp(-m(x - u_1)/\alpha_2) + \exp(-m(y - u_2)/\alpha_2)]^{(1/m)-2} \{m - 1 + [\exp(-m(x - u_1)/\alpha_1) + \exp(-m(y - u_2)/\alpha_2)]^{1/m}\} \exp\{-[\exp(-m(x - u_1)/\alpha_1) + \exp(-m(y - u_2)/\alpha_2)]^{1/m}\} \quad (3)$$

Modelo para el análisis de gastos máximos aguas abajo de la confluencia de dos ríos

Se parte de la suposición de que se cuenta con los datos de gastos máximos aforados en las dos estaciones existentes aguas arriba de la confluencia y se conoce la distribución conjunta, o bien que se puede inferir a partir de tales datos.

El modelo para el análisis de los gastos máximos aguas abajo de la confluencia de dos ríos, se puede construir como la distribución proporcionada por la integral de convolución para la suma de dos variables aleatorias (Woodrooffe, 1975):

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s, s) ds dt \quad (4)$$

donde t es la suma de las variables aleatorias.

Para el caso de la distribución bivariada de valores extremos tipo II, la ecuación (4) toma la forma siguiente:

$$F(t) = (1/\alpha_1\alpha_2) \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-m(t-s-u_1)/\alpha_1) \exp(-m(s-u_2)/\alpha_2) [\exp(-m(t-s-u_1)/\alpha_1) + \exp(-m(s-u_2)/\alpha_2)]^{(1/m)-2} \{m - 1 + [\exp(-m(t-s-u_1)/\alpha_1) + \exp(-m(s-u_2)/\alpha_2)]^{1/m}\} \exp\{-[\exp(-m(t-s-u_1)/\alpha_1) + \exp(-m(s-u_2)/\alpha_2)]^{1/m}\} ds dt \quad (5)$$

donde u_i y $\alpha_i, i = 1, 2$ son los parámetros de ubicación y escala del modelo bivariado, respectivamente.

Ejemplo de aplicación

A fin de demostrar la aplicabilidad de la metodología propuesta en un caso real, se seleccionaron dos estaciones de aforo ubicadas aguas arriba de la

confluencia de dos ríos: Bear River y Dry Creek (Salas, 1980). Dado que ambas están muy cerca de la confluencia, no fue necesario hacer un proceso de transferencia a un sitio próximo a aquélla.

Los parámetros de ubicación, escala y asociación que definen la distribución bivariada de valores extremos tipo II, estimados según los procedimientos delineados en Raynal (1985), para este caso son:

$$u_1 = 134.32 \text{ m}^3/\text{s}; \alpha_1 = 116.71 \text{ m}^3/\text{s}; \\ u_2 = 48.62 \text{ m}^3/\text{s}; \alpha_2 = 50.58 \text{ m}^3/\text{s}; m = 2.6976$$

Al integrar numéricamente la ecuación (5), se obtienen los valores que se indican en la columna 4 del cuadro 1; en la columna 3 están los valores de ocurrencia simultánea máxima; la columna 5 representa la curva de frecuencias de la suma de dos gastos máximos suponiendo completa dependencia y la columna 6 corresponde a la condición de completa independencia. Los valores de estas columnas están graficados en la ilustración 1.

Para este caso particular, el modelo indica una condición de completa dependencia, dadas las características físicas de la cuenca en estudio, pero para cuencas más grandes, es de esperarse que el modelo se ubique en un lugar intermedio entre las condiciones de completa dependencia y completa independencia.

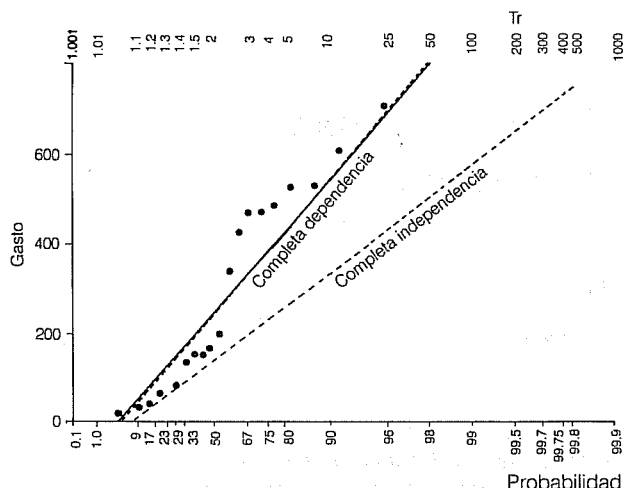
Conclusiones

Se ha presentado un modelo aproximado de la dis-

1. Comparación de curvas de frecuencias aguas abajo de la confluencia de dos ríos con diferentes procedimientos

Orden (1)	Probabilidad Pr($T \leq t$) porcentaje (2)	Ocurrencia Simultánea (m ³ /s) (3)	Modelo Propuesto (m ³ /s) (4)	Completa Dependencia (m ³ /s) (5)	Completa Independ. (m ³ /s) (6)
1	4.76	15.26	5.31	-3.33	-37.11
2	9.52	35.11	49.49	39.88	-1.97
3	14.29	36.90	79.91	71.60	23.03
4	19.05	58.90	105.10	98.35	43.62
5	23.81	64.00	128.16	122.51	61.84
6	28.57	78.44	149.65	145.23	78.64
7	33.33	130.54	170.56	167.19	94.60
8	38.09	147.24	191.25	188.86	110.09
9	42.86	152.06	212.06	210.67	125.43
10	47.62	162.45	233.36	236.88	140.81
11	52.38	199.64	255.43	255.87	156.47
12	57.14	337.54	278.76	280.04	172.68
13	61.90	428.00	303.84	305.25	189.70
14	66.66	471.19	330.44	333.91	207.91
15	71.43	474.02	361.36	365.17	227.83
16	76.19	489.82	396.21	400.78	250.10
17	80.95	528.11	437.78	442.96	275.95
18	85.71	532.78	490.40	495.69	307.53
19	90.48	609.66	564.08	568.07	349.74
20	95.23	705.66	683.36	687.90	417.26

1. Valores extremos tipo II



tribución de gastos máximos aguas abajo de dicha confluencia de dos ríos, cuando hay información disponible en dos puntos aguas arriba de la confluencia. El modelo supone que los gastos máximos en esos dos puntos están distribuidos conjuntamente de acuerdo con una distribución bivariada de valores extremos.

El modelo se aplicó a un caso real y mostró ser una buena aproximación al fenómeno físico que se pretende abordar. Es de esperarse que para estaciones de aforo que tengan registros más amplios, los resultados mejorarán significativamente. La conclusión más importante es que las distribuciones bivariadas de valores extremos son muy útiles en una gran variedad de problemas hidrológicos en general y en particular lo han demostrado en el caso aquí expuesto.

Nomenclatura

$F(.)$ = Función de distribución de probabilidad de (.)

$f(.)$ = Función de densidad de probabilidad de (.)

$Ln(.)$ = Logaritmo natural de (.)

m = Parámetro de asociación

s = Variable aleatoria

t = Variable aleatoria

u_i = Parámetro de ubicación de la muestra i

α_i = Parámetro de escala de la muestra i

El autor agradece el apoyo otorgado por la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería para la realización de este artículo.

Referencias

Gumbel, E.J. "Distributions des valeurs extremes en plusieurs dimensions", *Publications de l' Institute de Statistique*, vol. 9, pp. 171-173, 1960.

Gumbel, E.J., "Sommes et differences de valeurs extremes independantes", *Comptes Rendus Academie des Sciences*, vol. 253, pp. 2838-2939, 1961.

Gumbel, E.J., "Statistical theory of extreme values (main results)", en A.S., Sarhan y B.G. Greenberg (eds.), *Contribution to order statistics*, John Wiley and Sons, pp. 59-93, 1962.

Lisley, R.K. y Franzini, J.B., *Water resources engineering*, 3a edición, McGraw Hill Book Co., pp. 125-126, 1979.

Raynal-Villaseñor, J.A., *Bivariate extreme value distributions applied to flood frequency analysis*, Ph.D. Dissertation, Civil Engineering Department, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, 1985.

Salas J.D., "Transfer of information to improve estimates frequencies", en T.G. Sanders (ed.), *Hydrology for transportation engineers*, US Department of Transportation, Federal Highway Administration, Office of Research and Development Implementation Division, pp. 634-642, 1980.

Salas, J.D., Rueda, E., Raynal, J., *Bivariate Gumbel distribution for flood frequency analysis*, AGU Fall Meeting, San Francisco California, 1983.

Stroud, A.H., *Approximate calculation of multiple integrals*, Prentice Hall, pp. 200-205, 1971.

Woodrooffe, M., *Probability with applications*, McGraw-Hill Book Co., pp. 179-190, 1975.