

Tránsito inverso para la estimación de avenidas de ingreso a vasos

Álvaro A. Aldama
Ernesto Aguilar

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Se presentan y comparan, analítica y numéricamente, tres métodos para la determinación de avenidas de ingreso a vasos, fundamentados en el conocimiento de la elevación de la superficie libre del agua y del tránsito inverso de la avenida. Se consideran el método tradicional, en el que se emplea la regla trapezoidal, así como los esquemas de Adams-Bashforth y los de diferencias centrales. Los métodos se aplican a un caso hipotético y a la estimación de la avenida máxima registrada en el vaso de la presa El Infiernillo, Michoacán. Se concluye que el método de diferencias centrales, propuesto en este trabajo, exhibe el mejor comportamiento.

Palabras clave: determinación de avenidas, elevación de superficie libre, tránsito inverso, regla trapezoidal, esquemas de Adams-Bashforth, método de diferencias centrales, presa El Infiernillo, México.

Introducción

Las estaciones hidrométricas se sitúan, usualmente, en lugares que presentan estrechamientos naturales en los cauces con el fin de aprovechar la posible existencia de una sección de control. Por otra parte, dichos estrechamientos o *boquillas* resultan también convenientes para ubicar los sitios para la edificación de presas, ya que las constricciones topográficas permiten reducir la cantidad de material requerido para la construcción de la cortina.

Es práctica común que, una vez terminada la obra, la estación hidrométrica cese su operación. A partir de ese momento, los hidrogramas de ingreso al vaso de la presa se calculan mediante la medición de la elevación de la superficie libre del agua en el vaso, del empleo de las relaciones elevaciones-capacidades y elevaciones-descargas y del tránsito inverso o *antitránsito* de la avenida.

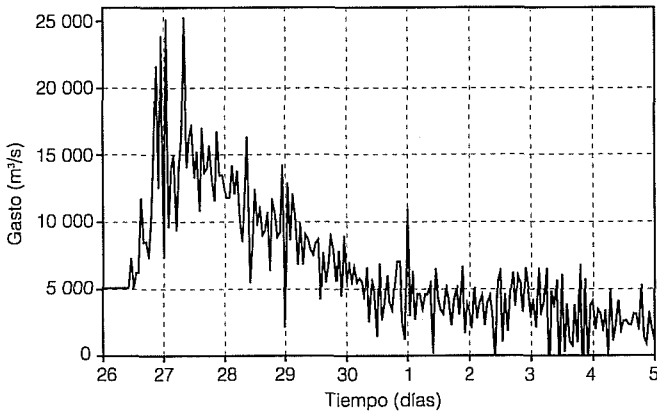
Los *antitránsitos* se llevan a cabo resolviendo numéricamente la ecuación de continuidad en forma inversa, calculando el gasto de ingreso al vaso a partir del gasto de egreso y de la tasa de cambio del almacenamiento en el tiempo. El esquema que tradicionalmente

se utiliza para discretizar la ecuación de continuidad es el de Crank-Nicolson o regla trapezoidal.

Los hidrogramas de ingreso, que se obtienen al aplicar el esquema antes mencionado, exhiben oscilaciones considerables que hacen dudar de la confiabilidad del método tradicional. Una muestra de este tipo de comportamiento se presenta en la ilustración 1, donde se aprecia la avenida máxima registrada en la presa El Infiernillo (construida sobre el cauce del río Balsas con el propósito principal de generar energía eléctrica), estimada mediante el método tradicional de tránsito inverso. En un hidrograma como el mostrado, es difícil saber si las oscilaciones son originadas por la variabilidad natural de la creciente o por algún artificio numérico.

Por lo que respecta a los autores de este artículo, no existe en la literatura especializada un estudio que analice la regla trapezoidal en el contexto de tránsitos inversos. Este trabajo tiene por objeto presentar un estudio analítico y numérico del comportamiento de la regla trapezoidal y, adicionalmente, de los esquemas de Adams-Bashforth y los de diferencias centrales en la solución inversa de la ecuación de continuidad. Con base en los análisis realizados, se ofrecen conclusiones en relación con la confiabilidad de los métodos.

1. Avenida máxima registrada en la presa El Infiernillo estimada mediante la aplicación del método tradicional de tránsito inverso



Tránsito inverso

La ecuación de continuidad en un vaso se expresa comúnmente como (Ponce, 1989):

$$\frac{dS}{dt} = I - O \quad (1)$$

en donde S representa el almacenamiento en el vaso; I , el gasto de ingreso; O , el gasto de egreso; y t , el tiempo.

Generalmente, (1) se resuelve en forma *directa*, sujeta a una condición inicial de la forma:

$$S(0) = S_0 \quad (2)$$

y acoplada con la relación elevaciones-capacidades:

$$S = S(h) \quad (3)$$

y la relación elevaciones-descargas:

$$O = O(h) \quad (4)$$

En (2), S_0 representa el almacenamiento inicial del vaso y en las (3) y (4), h representa la elevación de la superficie libre del agua, medida con respecto a un plano horizontal de referencia.

Al sustituir (3) y (4) en (1), ésta se transforma en:

$$\frac{dS}{dh} \frac{dh}{dt} + O(h) = I(t) \quad (5)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria (generalmente no lineal) en la elevación h , sujeta a una condición inicial del tipo:

$$h(0) = h_0 \quad (6)$$

donde h_0 es la elevación inicial en el vaso. (6) puede ser obtenida a partir de (2) y (3), siendo $h_0 = S^{-1}(S_0)$.

Cuando el hidrograma de ingreso al vaso, $I = I(t)$, es conocido, el problema definido por (5) y (6) se resuelve, generalmente, empleando métodos numéricos, a través de los cuales puede obtenerse una solución discreta.

La determinación de un hidrograma desconocido de ingreso a una presa, $I = I(t)$, contrasta con la situación descrita anteriormente. En este caso se conoce la evolución de la superficie libre del agua en el tiempo $h = h(t)$, y (3) y (4) se pueden emplear para determinar la evolución en el tiempo de los almacenamientos, $S = S(t)$, y de las descargas, $O = O(t)$. Entonces, (1) puede resolverse para el gasto de ingreso, resultando en:

$$I(t) = S'(t) + O(t) \quad (7)$$

donde $S'(t) \equiv dS/dt$. La aplicación de (7) es lo que se conoce como tránsito inverso o *antitránsito*. Pudiera parecer trivial resolver numéricamente (7) y así calcular una sucesión de valores discretos de los gastos de ingreso al vaso. No obstante, según se demostrará posteriormente, el método tradicional de tránsito inverso exhibe efectos numéricos espúreos.

Esquemas numéricos

En esta sección se presentan el método tradicional para llevar a cabo tránsitos inversos en vasos para la estimación de hidrogramas de ingreso, así como otros dos métodos alternativos.

La (7) se discretiza tradicionalmente empleando el esquema de Crank-Nicolson o regla trapezoidal (Gear, 1971):

$$\frac{I_{i+1} + I_i}{2} = \frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta t} + \frac{O_{i+1} + O_i}{2} \quad (8)$$

donde I_i representa una aproximación discreta a $I(j\Delta t)$; O_i , una aproximación discreta a $O(j\Delta t)$; S_i , una aproximación discreta a $S(j\Delta t)$; $j = 0, 1, 2, \dots$; y Δt , un intervalo de tiempo. Es sencillo demostrar que el esquema representado por (8) tiene un error de truncado de $O(\Delta t^2)$ en la aproximación de (7). Resolviendo (8) para I_{i+1} , se obtiene:

$$I_{i+1} = -I_i + O_{i+1} + O_i + 2 \frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta t} \quad (9)$$

(9) es la expresión discreta que se utiliza para llevar a cabo el tránsito inverso mediante el método tradicional.

Por otra parte, (7) también se puede discretizar mediante el esquema de Adams-Bashforth (Gear, 1971):

$$\frac{3}{2} I_{i+1} - \frac{1}{2} I_i = \frac{S_{i+2} - S_{i+1}}{\Delta t} + \frac{3}{2} O_{i+1} - \frac{1}{2} O_i \quad (10)$$

Este esquema también posee un error de truncado de $O(\Delta t^2)$. Despejando a I_{i+1} de (10), se obtiene:

$$I_{i+1} = \frac{1}{3} I_i + O_{i+1} - \frac{1}{3} O_i + \frac{2}{3} \frac{S_{i+2} - S_{i+1}}{\Delta t} \quad (11)$$

(11) representa la primera alternativa (Adams-Bashforth) al método tradicional para llevar a cabo tránsitos inversos.

Finalmente, (7) se puede discretizar mediante el método de diferencias centrales, que también posee un error de truncado de $O(\Delta t^2)$:

$$I_{i+1} = O_{i+1} + \frac{S_{i+2} - S_i}{2\Delta t} \quad (12)$$

(12) representa la segunda alternativa (diferencias centrales) al método tradicional para llevar a cabo tránsitos inversos.

Estabilidad

En esta sección se analiza la estabilidad de los esquemas presentados anteriormente. Es interesante notar que es posible demostrar que cuando las ecuaciones discretas que aproximan la ecuación de continuidad (1) se resuelven en forma *directa*:

- El esquema de Crank-Nicolson o regla trapezoidal es incondicionalmente estable.
- El esquema de Adams-Bashforth es condicionalmente estable.
- El esquema de diferencias centrales es incondicionalmente inestable (Gear, 1971 y Fantula, 1988).

No obstante, las propiedades de estabilidad de dichos esquemas varían al considerarse la solución *inversa* de las ecuaciones discretas que aproximan la ecuación de continuidad.

Por *estabilidad* se entiende, en este caso, la propiedad de no crecer que tiene un error inicial de redondeo en la variable dependiente que se está calculando, *suponiendo la ausencia de otras fuentes de error*. De acuerdo con esto, se supone que el gasto de ingreso se expresa como:

$$I_i = \hat{I}_i + \varepsilon_i \quad (13)$$

para todo valor de j . En (13) $\hat{I}_i$ representa la solución exacta de la ecuación discreta, esto es, la que se calcularía con aritmética de precisión infinita. En la misma ecuación, ε_i representa el error de redondeo correspondiente al instante j .

Con el objeto de analizar la estabilidad del método tradicional de tránsito inverso, sustituyamos (13) en (9), con lo que se obtiene:

$$\hat{I}_{i+1} + \varepsilon_{i+1} = -\hat{I}_i - \varepsilon_i + O_{i+1} + O_i + 2 \frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta t} \quad (14)$$

Dado que se ha supuesto que, aparte del error de redondeo en cada instante (que ha resultado de la propagación del error inicial de redondeo), no existen otras fuentes de error $\hat{I}_{i+1}$ e $\hat{I}_i$ satisfacen la ecuación discreta de continuidad (9) en *forma exacta*, esto es:

$$\hat{I}_{i+1} = -\hat{I}_i + O_{i+1} + O_i + 2 \frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta t} \quad (15)$$

Sustituyendo (15) en (14) se obtiene la ecuación discreta que satisface el error de redondeo:

$$\varepsilon_{i+1} = -\varepsilon_i \quad (16)$$

(16) es una ecuación de diferencias de primer orden. Su solución se obtiene suponiendo que (Mickens, 1987):

$$\varepsilon_i = \xi^i \quad (17)$$

donde ξ es el factor de amplificación del error de redondeo (que en general puede ser complejo). La condición de estabilidad es (Fantula, 1988):

$$|\xi| \leq 1 \quad (18)$$

Sustituyendo (17) en (16) se llega a:

$$\xi = -1 \quad (19)$$

lo que implica que el esquema de Crank-Nicolson o regla trapezoidal es neutralmente estable. No obstan-

te, dado que ξ es negativo, se espera un comportamiento oscilatorio del error (Mickens, 1987). Esto se debe a que, de acuerdo con (19), el error se mantiene en módulo de un instante a otro, pero cambia de signo. Esto explica el comportamiento oscilatorio de los hidrogramas estimados a través de tránsitos inversos basados en la regla trapezoidal.

Sustituyendo ahora (13) en (10) y haciendo uso del hecho que $\hat{I}_{j+1}$ e $\hat{I}_j$ satisfacen la ecuación discreta (10) en forma exacta, se obtiene la ecuación de diferencias que satisface el error de redondeo para el esquema de tránsito inverso de Adams-Bashforth:

$$\varepsilon_{i+1} = \frac{1}{3} \varepsilon_i \quad (20)$$

Sustituyendo ahora (17) en (20) se obtiene el siguiente factor de amplificación del error de redondeo:

$$\xi = \frac{1}{3} \quad (21)$$

por lo que el esquema de Adams-Bashforth es incondicionalmente estable para tránsito inverso, y dado que $0 < \xi < 1$, se espera que, en ausencia de otras fuentes de error, el error de redondeo inicial decrezca monótonicamente con el tiempo.

Siguiendo un procedimiento análogo, se concluye que la ecuación de diferencias que satisface el error de redondeo para el esquema de diferencias centrales (12) es la siguiente:

$$\varepsilon_{i+1} = 0 \quad (22)$$

lo cual implica que:

$$\xi = 0 \quad (23)$$

por lo que el esquema de diferencias centrales también es incondicionalmente estable y, en ausencia de otras fuentes de error, el error inicial de redondeo no se propaga a tiempos posteriores.

Propagación de errores

En la práctica, los valores de los almacenamientos discretos, S_i , y de los gastos de egreso discretos, O_i , están contaminados por errores de medición y de redondeo. Un análisis completo de propagación de errores debe tomar en cuenta lo anterior. De acuerdo con esto, suponemos que los gastos de ingreso y de egreso, y los almacenamientos pueden expresarse como:

$$I_i = \hat{I}_i + E_i^I \quad (24)$$

$$O_i = \hat{O}_i + E_i^O \quad (25)$$

$$S_i = \hat{S}_i + E_i^S \quad (26)$$

donde las variables con acento circunflejo representan los valores exactos correspondientes; E_i^I representa el error total en los gastos de ingreso; E_i^O el error total en los gastos de egreso, y E_i^S el error total en los almacenamientos.

Con el objeto de analizar la propagación de errores en el esquema tradicional de tránsito inverso (regla trapezoidal o Crank-Nicolson), sustituyamos (24) (25) y (26) en (9). Tomando en cuenta que $\hat{I}_i$, $\hat{O}_i$ y $\hat{S}_i$ satisfacen a (9) en forma exacta, se obtiene la siguiente ecuación para el error total en los gastos de ingreso:

$$E_{j+1}^I = -E_j^I + E_{j+1}^O + E_j^O + 2 \frac{E_{j+1}^S - E_j^S}{\Delta t} \quad (27)$$

(27) es válida para todo valor de $j \geq 0$. Por tanto, puede escribirse que:

$$E_j^I = -E_{j-1}^I + E_j^O + E_{j-1}^O + 2 \frac{E_j^S - E_{j-1}^S}{\Delta t} \quad (28)$$

Sustituyendo (28) en (27), se obtiene:

$$E_{j+1}^I = E_{j-1}^I + E_{j+1}^O - E_{j-1}^O + 2 \frac{E_{j+1}^S - 2E_j^S + E_{j-1}^S}{\Delta t} \quad (29)$$

Continuando con este proceso en forma inductiva, se llega finalmente a la siguiente ecuación, que expresa el error total en el cálculo del gasto de ingreso, para el instante $j + 1$, correspondiente al método tradicional de tránsito inverso:

$$E_{j+1}^I = (-1)^{j+1} E_0^I + \left[E_{j+1}^O + (-1)^j E_0^O \right] + \frac{2}{\Delta t} \left[E_{j+1}^S - 2 \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i+1} E_{j-i+1}^S + (-1)^{j+1} E_0^S \right] \quad (30)$$

(30) pone de manifiesto que los errores se propagan de un instante a otro cuando se aplica la regla trapezoidal. El primer término en dicha ecuación representa la contribución del error inicial en el gasto de ingreso, que alterna su signo en instantes sucesivos. El segundo y tercer términos (entre corchetes) representan la contribución de los errores en los gastos de egreso y en los almacenamientos, respectivamente.

Según puede observarse, estos términos también contienen componentes que alternan su signo en instantes sucesivos. Esto explica, ahora en forma completa, el carácter oscilatorio de los hidrogramas estimados a través del método tradicional de tránsito inverso, y evidencia la naturaleza espúrea de las oscilaciones.

Es interesante notar en (30) que, en relación con los errores en el gasto de ingreso, sólo existe contribución del error inicial. En lo referente a los gastos de egreso, contribuyen el error inicial y el error introducido en el instante corriente ($j + 1$).

En contraste, existe contribución de *todos* los errores en los almacenamientos, desde el instante inicial hasta el corriente. Asimismo, dado que los módulos de los coeficientes que multiplican a los errores iniciales en los gastos de ingreso y de egreso en (30) son iguales a uno, no existe un amortiguamiento monótonico de dichos errores según avanza el tiempo.

Por último, los errores en los almacenamientos, que se acumulan en el tiempo, se encuentran divididos por Δt en (30), por lo que se espera que el comportamiento del método tradicional de antitránsito se deteriore para valores pequeños del intervalo de tiempo.

Procediendo de manera análoga, se obtiene la siguiente expresión para el error total en el gasto de ingreso correspondiente al esquema de Adams-Bashforth para tránsito inverso:

$$E_{i+1}^I = \frac{1}{3^{i+1}} E_0^I + \left[E_{i+1}^O - \frac{1}{3^{i+1}} E_0^O \right] + \frac{2}{3\Delta t} \left[E_{i+1}^S - 2 \sum_{j=1}^i \frac{1}{3^{j-i+1}} E_j^S + \frac{1}{3^{i+1}} E_0^S \right] \quad (31)$$

En este caso *no existe alternancia de signo en los errores*. Por otra parte, en forma similar al caso anterior, contribuyen al error total en el gasto de ingreso:

- El error inicial en el propio gasto de ingreso.
- El error corriente.
- El error inicial en el gasto de egreso.
- Todos los errores en los almacenamientos, desde el instante inicial hasta el corriente.

Ahora bien, los módulos de los coeficientes que multiplican a los errores iniciales en los gastos de ingreso y de egreso en (31) son estrictamente menores que uno, por lo que existe un amortiguamiento monótonico de dichos errores según avanza el tiempo. En este sentido, se espera que el esquema de Adams-Bashforth para tránsito inverso tenga un mejor comportamiento que el método tradicional.

No obstante, los errores en los almacenamientos, que se acumulan en el tiempo, también se encuentran divididos por Δt en (31), por lo que, de nuevo, se espera un deterioro del comportamiento del método de Adams-Bashforth para tránsito inverso, para valores pequeños del intervalo de tiempo.

Finalmente, un procedimiento similar a los anteriores resulta en la siguiente expresión para el error total en el gasto de ingreso correspondiente al esquema de diferencias centrales para tránsito inverso:

$$E_{i+1}^I = E_{i+1}^O + \frac{E_{i+2}^S - E_i^S}{2\Delta t} \quad (32)$$

En este caso *no existe acumulación de errores en el tiempo*. En efecto, (32) muestra que el error total en el gasto de ingreso sólo está determinado por el error corriente en el gasto de egreso, y los errores en los almacenamientos en los instantes anterior y siguiente. Por este motivo, *se espera que el esquema de diferencias centrales para tránsito inverso tenga mejor comportamiento y sea más confiable que el método tradicional y el esquema de Adams-Bashforth*.

Aplicación a un caso hipotético

Con el objeto de evaluar los métodos de tránsito inverso anteriormente expuestos, en esta sección se presentará un caso hipotético para el que la ecuación de tránsito de avenidas en vasos puede ser integrada analíticamente y, por tanto, se cuenta con una solución exacta que puede ser empleada para fines de comparación.

La relación elevaciones-capacidades para elevaciones mayores que la correspondiente a la cresta vertedora, h_c , puede parametrizarse como:

$$\frac{S - S_c}{S_m - S_c} = \left(\frac{h - h_c}{h_m - h_c} \right)^\alpha \quad (33)$$

donde S representa el volumen de almacenamiento correspondiente a la elevación h ; S_c representa el volumen de almacenamiento correspondiente a la elevación de la cresta vertedora, h_c ; S_m representa el volumen de almacenamiento correspondiente a una elevación de referencia, h_m , suficientemente grande como para que no la excedan las elevaciones de la superficie del agua que puedan alcanzarse en el tránsito de la avenida de interés y $\alpha > 1$ es un exponente que se determina mediante regresión.

De la Ec. (33) se obtiene:

$$\frac{h - h_c}{h_m - h_c} = \left(\frac{S - S_c}{S_m - S_c} \right)^\beta \quad (34)$$

donde $\beta = 1/\alpha$ (1).

Suponiendo que el almacenamiento a través del que se va a transitar la avenida posee un vertedor de demasías con descarga libre, la ley elevaciones-descargas obedecerá a una relación del tipo siguiente:

$$O = \mu L \sqrt{2g} (h - h_c)^{3/2} \quad (35)$$

donde μ representa un coeficiente de descarga adimensional, y L , la longitud de la cresta vertedora. Con el objeto de plantear el problema de tránsito en forma adimensional, es conveniente definir las siguientes escalas:

$$S_e = S_m - S_c \quad (36)$$

$$Q_e = \mu L \sqrt{2g} (h_m - h_c)^{3/2} \quad (37)$$

$$h_e = h_m - h_c \quad (38)$$

$$t_e = \frac{S_e}{Q_e} \quad (39)$$

donde S_e representa la escala de volúmenes de almacenamiento; Q_e , la escala de gastos; h_e , la escala de elevaciones; y t_e , la escala de tiempos. Con base en la anterior definición de escalas, sirvan las siguientes expresiones para definir, respectivamente, el volumen de almacenamiento adimensional, el gasto de ingreso al vaso adimensional, el gasto de egreso adimensional, la elevación adimensional y el tiempo adimensional:

$$S_* = \frac{S - S_c}{S_e} \quad (40)$$

$$I_* = \frac{I}{Q_e} \quad (41)$$

$$O_* = \frac{O}{Q_e} \quad (42)$$

$$h_* = \frac{h - h_c}{h_e} \quad (43)$$

$$t_* = \frac{t}{t_e} = \frac{Q_e}{S_e} t \quad (44)$$

Empleando de (36) a (44) en la expresión que gobierna el tránsito de la avenida en el vaso, (1), se obtiene:

$$\frac{dS_*}{dt_*} = I_* - S_*^{3/2\beta} \quad (45)$$

Suponiendo que el vaso a través del que se desee transitar la avenida posea características geométricas tales que $\beta = 2/3$, (45) puede escribirse como:

$$\frac{dS_*}{dt_*} + S_* = I_*(t_*) \quad (46)$$

De este modo, la ecuación de tránsito se redujo a una ecuación diferencial ordinaria, lineal y con coeficientes constantes. Suponiendo que la condición inicial a la que se sujete (1) sea de la forma $S(0) = S_0 \equiv S_c$, que equivale a que el vaso se encuentre a la elevación de la cresta vertedora en el tiempo inicial, la condición inicial correspondiente a (46) será:

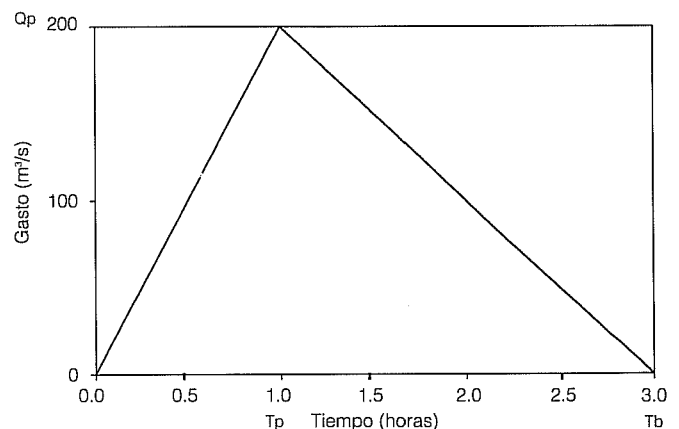
$$S_*(0) = 0 \quad (47)$$

(46), sujeta a la condición inicial (47), puede integrarse fácilmente. La solución correspondiente es:

$$S_*(t_*) = e^{-t_*} \int_0^{t_*} I_*(\tau) e^{\tau} d\tau \quad (48)$$

Consideremos ahora un hidrograma triangular de ingreso a un vaso de almacenamiento como el mostrado en la ilustración 2. El gasto de ingreso dimensional obedece entonces a las relaciones siguientes:

2. Hidrograma de ingreso triangular para la evaluación numérica de los métodos de tránsito inverso



$$I(t) = \begin{cases} Q_p = \frac{t}{t_p}, & 0 \leq t < t_p \\ Q_p \left(1 - \frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right), & t_p \leq t < t_b \\ 0, & t \geq t_b \end{cases} \quad (49)$$

donde Q_p representa el gasto pico; t_p , el tiempo al pico y t_b , el tiempo base. El volumen del hidrograma V , obviamente está dado por:

$$V = \frac{Q_p t_b}{2} \quad (50)$$

El hidrograma de ingreso *adimensional* correspondiente al hidrograma definido por (49) está dado por:

$$I.(t.) = \begin{cases} \frac{\xi}{\gamma} t., & 0 \leq t. < \gamma \\ \xi \left(\frac{2\sigma - \xi t.}{2\sigma - \xi \gamma} \right), & \gamma \leq t. < \frac{2\sigma}{\xi} \\ 0, & \frac{2\sigma}{\xi} \leq t. \end{cases} \quad (51)$$

donde γ , ξ y σ son parámetros adimensionales definidos como:

$$O. = \frac{O}{Q_e} \quad (52)$$

$$h. = \frac{h - h_c}{h_e} \quad (53)$$

$$t. = \frac{t}{t_e} = \frac{Q_e}{S_e} t \quad (54)$$

De acuerdo con (48), la solución de (46) correspondiente al hidrograma triangular expresado por (51) es:

$$S.(t.) = \begin{cases} \frac{\xi}{\gamma} (t. + e^{-t.} - 1), & 0 \leq t. < \gamma \\ e^{(\gamma-t.)} S.(\gamma) + \frac{\xi}{2\sigma - \gamma\xi} \left\{ [2\sigma - \xi(t.-1)] - e^{(\gamma-t.)} [2\sigma - \xi(\gamma-1)] \right\}, & \gamma \leq t. < \frac{2\sigma}{\xi} \\ S. \left(\frac{2\sigma}{\xi} \right) e^{(2\sigma/\xi - t.)}, & \frac{2\sigma}{\xi} \leq t. \end{cases} \quad (55)$$

donde

$$S.(\gamma) = \frac{\xi}{\gamma} (\gamma + e^{-\gamma} - 1) \quad (56)$$

$$S. \left(\frac{2\sigma}{\xi} \right) = e^{(\gamma - 2\sigma/\xi)} S.(\gamma) + \frac{\xi}{2\sigma - \gamma\xi} \left\{ \xi - e^{(\gamma - 2\sigma/\xi)} [2\sigma - \xi(\gamma-1)] \right\} \quad (57)$$

De (55) puede obtenerse la evolución de los almacenamientos *dimensionales* en el tiempo, dado que conforme a (40):

$$S(t) = S_c + S_e S. \left(\frac{t}{t_e} \right) \quad (58)$$

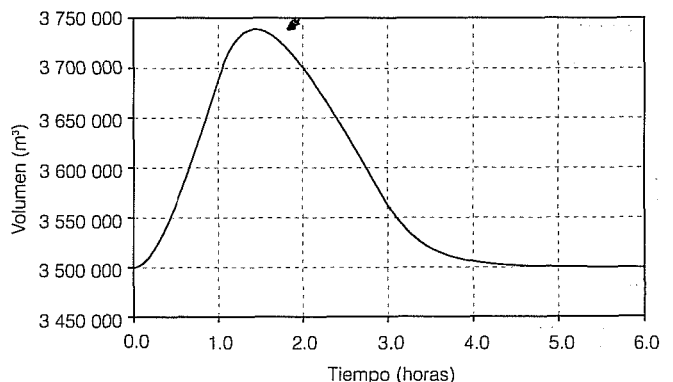
Para el caso que nos ocupa, esto es para $\beta = 2/3$, $O_* = S_*$. Por tanto, de acuerdo con (42), el hidrograma de ingreso *dimensional*, puede calcularse como sigue:

$$O(t) = Q_e S. \left(\frac{t}{t_e} \right) \quad (59)$$

(59) es la expresión a ser utilizada para llevar a cabo el tránsito de la avenida definida por la avenida dada por (49).

A fin de evaluar numéricamente los métodos de tránsito inverso expuestos anteriormente, consideramos ahora una avenida con hidrograma triangular, con parámetros $Q_p = 200 \text{ m}^3/\text{s}$, $t_p = 1 \text{ h}$, y $t_b = 3 \text{ h}$ (ilustración 2); a ser transitada por un vaso con características geométricas dadas por $S_c = 3.5 \times 10^6 \text{ m}^3$, $S_m = 4 \times 10^6$

3. Evolución de almacenamientos en el tiempo



m^3 , $h_c = 50$ m, $h_m = 54.655$ m, y, por supuesto, $\beta = 2/3$; con un vertedor con características $\mu = 0.49$ y $L = 15$ m.

La evolución de los almacenamientos en el tiempo para estos datos, calculada con (58), se muestra en la ilustración 3. El resultado de aplicar la ecuación de tránsito (59) se muestra en la ilustración 4 que incluye los hidrogramas de ingreso y egreso. La evolución de los almacenamientos y el hidrograma de egreso se emplearon para evaluar los métodos de tránsito inverso, descritos anteriormente, mediante el empleo de (9), (11) y (12).

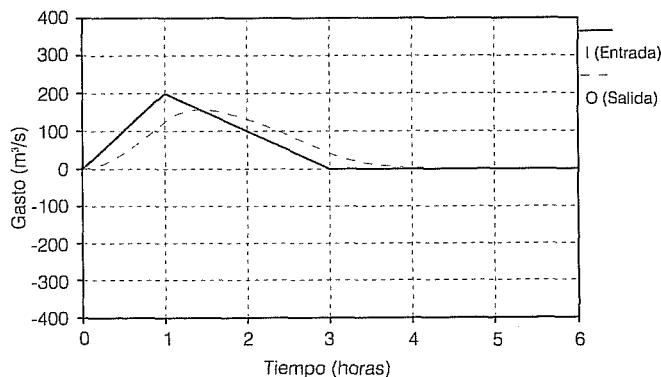
En la práctica, las lecturas de escala en vasos de almacenamiento están sujetas a error, lo que afecta la estimación sucesiva de elevaciones, almacenamientos y gastos de egreso. Con el objeto de simular la ocurrencia de errores aleatorios en la lectura de escala, de conformidad con (34), (36) y (40), se calculó la elevación en el vaso empleando la expresión siguiente:

$$h(t) = h_c + (h_m - h_c)^{2/3} S. \left(\frac{t}{t_e} \right) + e(t) \quad (60)$$

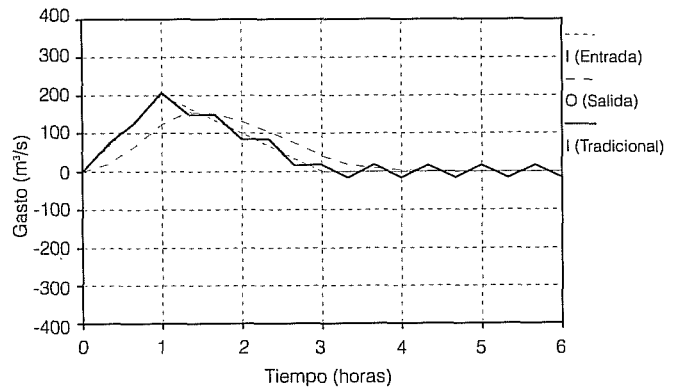
donde $e(t)$ es un error aleatorio con distribución uniforme que puede tomar valores entre -0.005 m y $+0.005$ m. En la operación de lectura de escalas en limnómetros también se introduce un error de redondeo. Por esta razón el resultado, al aplicar (60), se redondeó a dos cifras significativas. Con base en las elevaciones así obtenidas, los almacenamientos y los gastos de egreso se establecieron empleando (33) y (35), respectivamente.

Los hidrogramas de ingreso calculados con el método tradicional de tránsito inverso (regla trapezoidal o Crank-Nicolson) se muestran en las ilustraciones 5-8, que corresponden a diferentes valores del intervalo de tiempo, Δt . Según puede observarse en dichas figuras, los hidrogramas de ingreso estimados exhiben

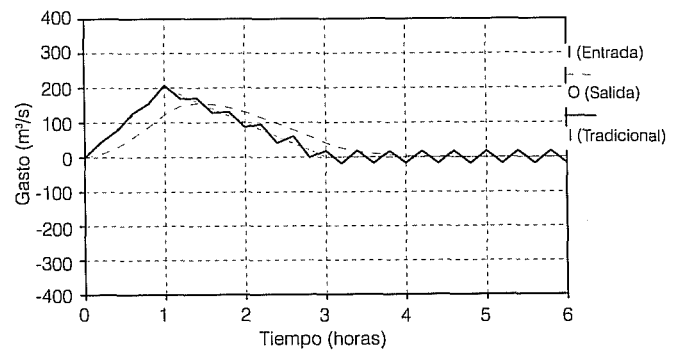
4. Tránsito de la avenida con hidrograma triangular



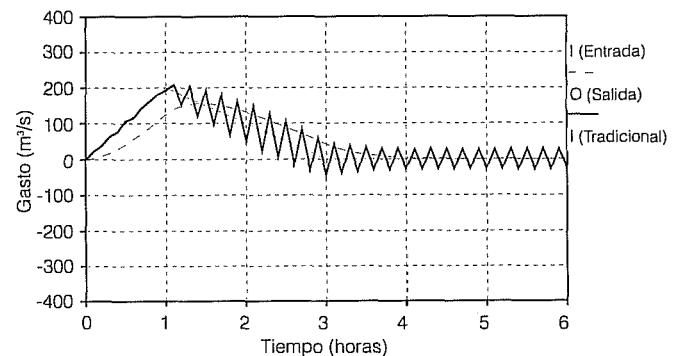
5. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método tradicional para $\Delta t = 1200$ s



6. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método tradicional para $\Delta t = 720$ s



7. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método tradicional para $\Delta t = 360$ s

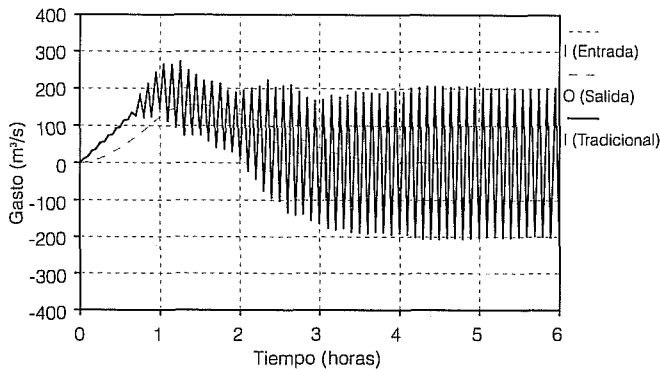


oscilaciones espúreas, lo cual valida las predicciones teóricas. Adicionalmente, también conforme a la teoría, las estimaciones de los hidrogramas de ingreso se deterioran para valores pequeños de Δt .

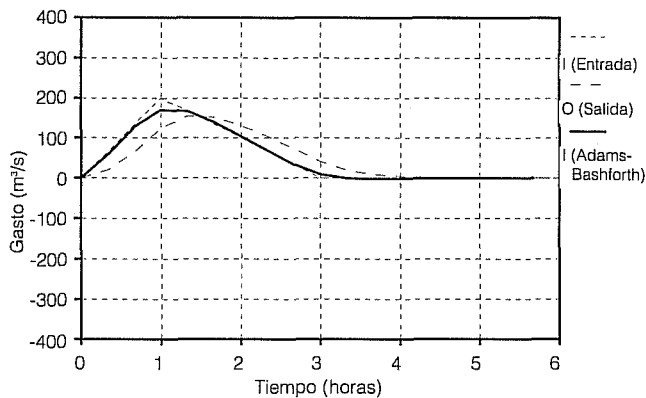
Los hidrogramas de ingreso calculados con el método tradicional de tránsito de Adams-Bashforth de tránsito inverso se muestran en las ilustraciones 9-12, para

diferentes valores de Δt . Los hidrogramas estimados exhiben errores que tienden a decrecer con Δt , con excepción del valor más pequeño de Δt ($= 180$ s, ilustración 12), para el cual se observa un incremento en los errores. Esto también fue predicho por el análisis teórico presentado con anterioridad ya que, para el

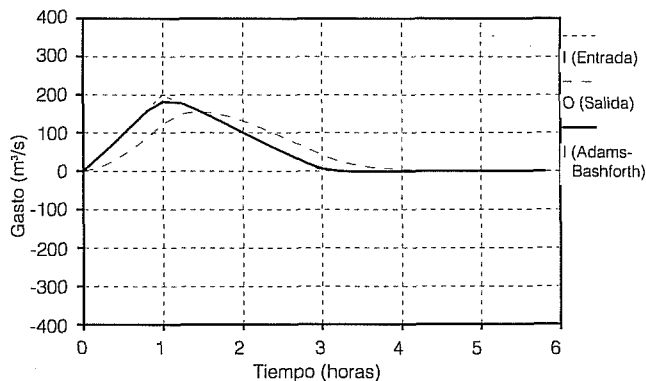
8. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método tradicional para $\Delta t = 180$ s



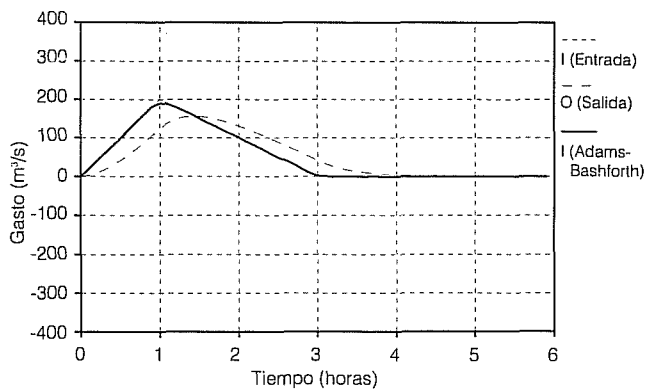
9. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método de Adams-Bashforth para $\Delta t = 1200$ s



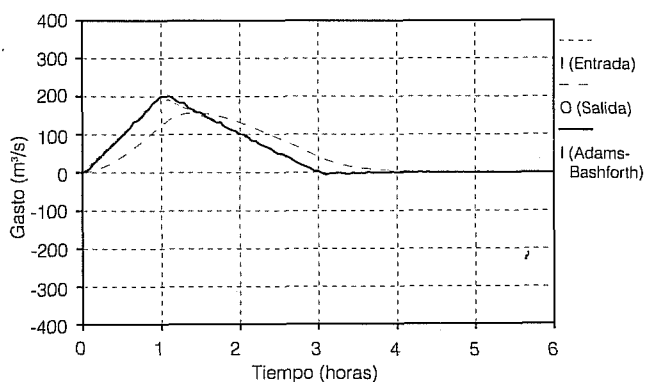
10. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método de Adams-Bashforth para $\Delta t = 720$ s



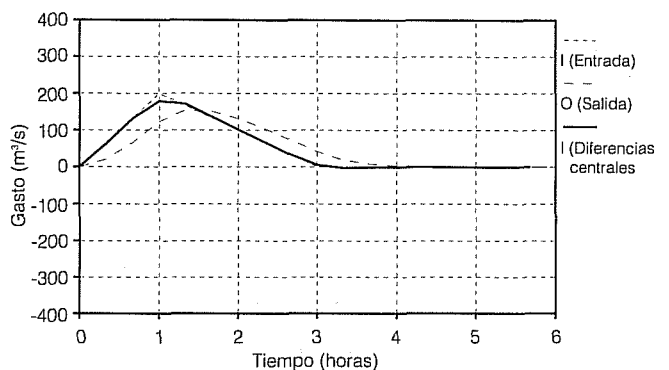
11. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método de Adams-Bashforth para $\Delta t = 360$ s



12. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método Adams-Bashforth para $\Delta t = 180$ s



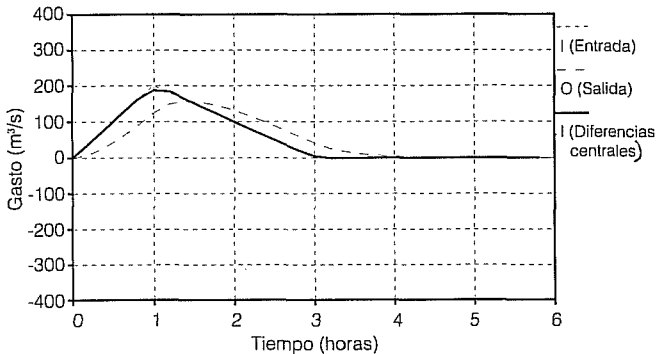
13. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método de diferencias centrales para $\Delta t = 1200$ s



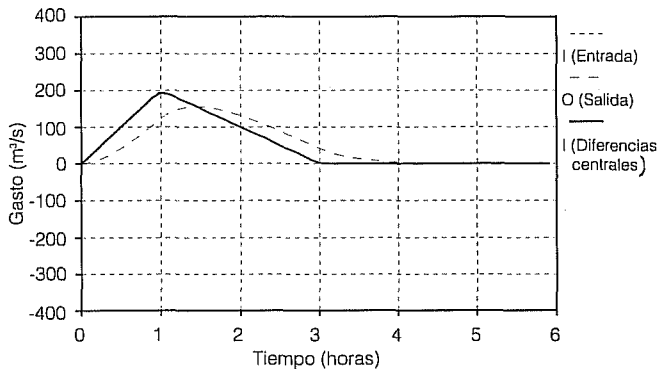
esquema en cuestión, los errores acumulados en los almacenamientos se encuentran divididos por Δt .

Los hidrogramas de ingreso calculados con el método de diferencias centrales de tránsito inverso se muestran en las ilustraciones 13-16 para diferentes valores de Δt . Los errores en los hidrogramas estimados

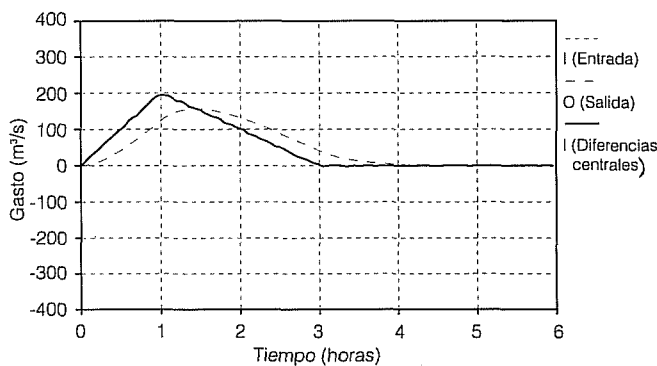
14. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método de diferencias centrales para $\Delta t = 720$ s



15. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método de diferencias centrales para $\Delta t = 360$ s



16. Estimación del hidrograma de ingreso mediante el método de diferencias centrales para $\Delta t = 180$ s



también decrecen con Δt , pero los resultados obtenidos con este método superan considerablemente a los correspondientes al método tradicional y también son mejores que los obtenidos con el procedimiento de Adams-Bashforth para todos los valores de Δt considerados.

La superioridad del método de diferencias centrales se observa de manera más palpable en la ilustración 17, en la que se presenta una gráfica de la norma infinita del error (definida como el máximo del valor absoluto de la diferencia entre el hidrograma de ingreso exacto y el hidrograma de ingreso estimado), como función de Δt . Esto también confirma la teoría presentada, dado que no existe acumulación de errores para el método de diferencias centrales.

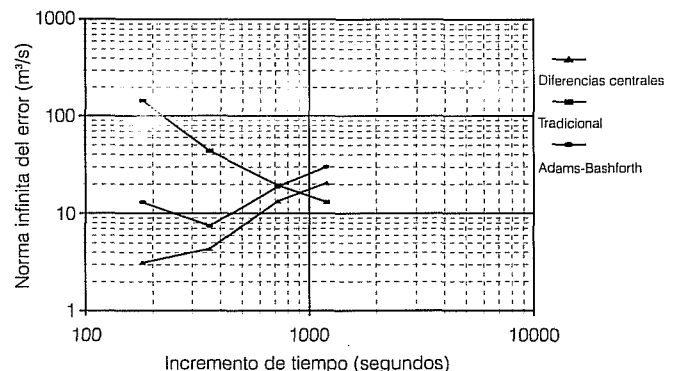
Aplicación a la estimación de la avenida máxima registrada en la presa El Infiernillo

Los métodos convencional y de diferencias centrales de tránsito inverso se aplicaron a la estimación de la avenida máxima registrada (del 25 de septiembre al 5 de octubre de 1967) en la presa El Infiernillo, con el objeto de contrastar sus resultados. La evolución de los niveles en el vaso, así como los gastos descargados para la avenida en cuestión, se obtuvieron de los estados de operación del embalse.

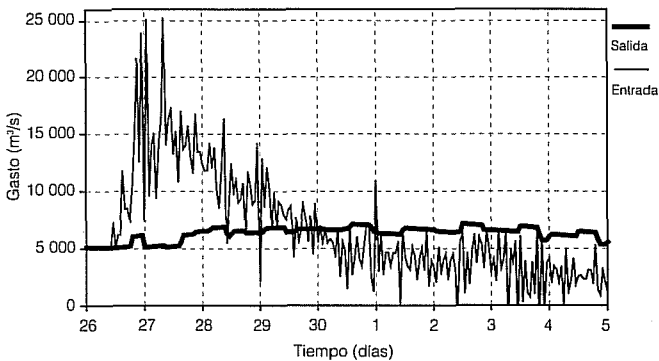
Los hidrogramas de ingreso estimados con el método tradicional y con el método de diferencias centrales de tránsito inverso se muestran en las ilustraciones 18 y 19. Como era de esperarse, el hidrograma estimado con el método tradicional exhibe oscilaciones mucho más pronunciadas que el correspondiente al método de diferencias centrales.

Conforme a estos cálculos, el gasto pico estimado mediante el método convencional fue de 25 276 m³/s, mientras que el correspondiente al de diferencias centrales, alcanzó los 20 830 m³/s, lo que representa una diferencia del 21%. En este caso se sobrestimó el gasto pico del hidrograma, pero éste también podría haber sido subcuestionado ya que, como se ha demostrado, el error asociado con el método tradicional cambia de signo con el tiempo.

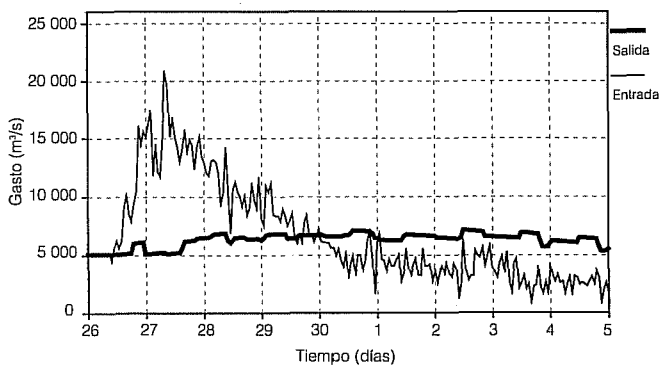
17. Norma infinita del error como función del incremento de tiempo para los diferentes métodos de tránsito inverso



18. Tránsito inverso de la avenida máxima registrada en la presa El Infiernillo mediante la aplicación del método tradicional



19. Tránsito inverso de la avenida máxima registrada en la presa El Infiernillo mediante la aplicación del método de diferencias centrales



Lo anterior puede impactar significativamente la estimación de la avenida en estudios de revisión hidrológica de presas, ya que diferencias del orden del 20% en la estimación de gastos pico de avenidas máximas registradas pueden traducirse, por efecto de extrapolación, en diferencias de más del 100% para gastos pico correspondientes a periodos de retorno de diseño, lo que puede significar, en el caso de que el gasto pico se subestime, que la presa sea sensiblemente menos segura de lo que se supone, o, en el caso de que el gasto pico se sobrestime, que posibles programas de rehabilitación de la presa se encarezcan innecesariamente.

Conclusiones

Se ha presentado un estudio comparativo de tres procedimientos para la estimación de hidrogramas de ingreso a vasos mediante tránsito inverso o *antitránsito*: el método tradicional, basado en la regla trapezoidal o de Crank-Nicolson, el de Adams-Bashforth y el de diferencias centrales.

Con base en un análisis teórico de los métodos, atendiendo a sus propiedades de estabilidad y de propagación de errores, y en una evaluación numérica de los mismos en el contexto de un caso hipotético para el cual se conoce la solución exacta, se ha concluido que el método de diferencias centrales es el más confiable, dado que no exhibe oscilaciones espúreas (como lo hace el método convencional) y es más preciso que los otros dos métodos estudiados.

Por otra parte, al comparar los desempeños del método convencional y del método de diferencias centrales en la estimación de la avenida máxima registrada en la presa El Infiernillo, se ha demostrado que las oscilaciones presentes en el método convencional pueden resultar en errores considerables en la estimación del gasto pico de las avenidas estimadas a través de tránsito inverso.

Dado que no existe garantía acerca del signo del error en la estimación del gasto pico que resultaría en una sobrestimación o una subestimación, lo que puede producir consecuencias negativas en el sentido económico o de incremento de riesgo en la operación de una presa. Este tipo de problemas se eliminan mediante la aplicación, recomendada en este trabajo, del método de diferencias centrales que, incluso, es más fácil de utilizar que el método tradicional, ya que implica un menor número de operaciones aritméticas por intervalo de tiempo.

Recibido: marzo, 1996
Aprobado: marzo, 1996

Referencias

- Fantula, S. O. (1988), Numerical Methods for Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Academic Press.
- Gear, C.W. (1971), Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall.
- Mickens, R. E. (1987), Difference Equations, Van Nostrand Reinhold.
- Ponce, V. M. (1989), Engineering Hydrology-Principles and Practices, Prentice Hall.

Abstract

Aldama A.A. and Aguilar E. "Inverse Flood Routing to Estimate Inflow Hydrographs to Reservoirs". *Hydraulic Engineering in Mexico* (in Spanish). Vol. XII. Num. 1, pages 15-26, January-April, 1997.

Three methods for the determination of inflow hydrographs to reservoirs, based on the knowledge of water surface elevation and on inverse flood routing are presented and analytically and numerically compared. The traditional method, in which the trapezoidal rule is employed and the Adams-Bashforth as well as the central difference schemes are considered. These methods are applied to a hypothetical case and to the estimation of the largest recorded flood in the El Infiernillo dam, México. It is concluded that the central difference method, proposed in this paper, exhibits the best performance.

Key words: determination of inflow hydrographs, water surface elevation, inverse flood routing, trapezoidal rule, Adams-Bashforth scheme, central difference method, El Infiernillo dam, Mexico.