Ingeniería Hidráulica en México. Vol. XIII, Núm. 2, págs. 67-72, mayo-agosto de 1998

Nota técnica

Fórmula aproximada para calcular el tirante crítico en un canal trapecial

Sergio Ignacio Martínez Martínez

Universidad Autónoma de Aguascalientes

Se presenta una fórmula aproximada para calcular el tirante crítico en canales de sección trapecial. La fórmula se obtiene al tomar en cuenta una relación prácticamente lineal entre dos parámetros adimensionales. La fórmula propuesta se compara con otras fórmulas aproximadas. Se concluye que puede utilizarse con cierta ventaja con respecto a las otras fórmulas.

Palabras clave: hidráulica de canales, flujo crítico, sección trapecial, fórmula aproximada, tirante crítico.

Introducción

En el análisis y diseño de canales se presenta con frecuencia la necesidad de calcular tirantes críticos en canales de sección transversal trapecial. En este caso la solución de la ecuación de flujo en estado crítico no es directa, por lo que se han propuesto varias alternativas para calcular el tirante crítico:

- Proceder por tanteos.
- Leer gráficas.
- Utilizar fórmulas aproximadas.
- Utilizar algún método numérico.
- Utilizar una combinación de las anteriores.

Cuando se esta trabajando a mano y se desea un resultado aproximado más o menos preciso y no se quiere efectuar un proceso de aproximaciones, el método que se prefiere es el de las fórmulas aproximadas. En la literatura se pueden encontrar fórmulas aproximadas que pueden cumplir con las condiciones anteriores, como son las propuestas por Agroskin (Gardea, 1990), Straub (French, 1988) y Swamee (1993). Aquí se propone otra ecuación que puede competir ventajosamente con éstas.

Desarrollo

Establecimiento de la fórmula aproximada

Para cualquier sección la ecuación de estado crítico puede escribirse (Sotelo, 1993):

$$\alpha \frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{B_c} \tag{1}$$

donde α (adimensional) es el coeficiente de Coriolis, Q (m³/s) el caudal que circula por el canal, g (9.81 m/s²) la aceleración de la gravedad, A_c (m²) el área hidráulica crítica y B_c (m) el ancho hidráulico crítico. Para un canal con sección trapecial (ilustración 1), se tiene que:

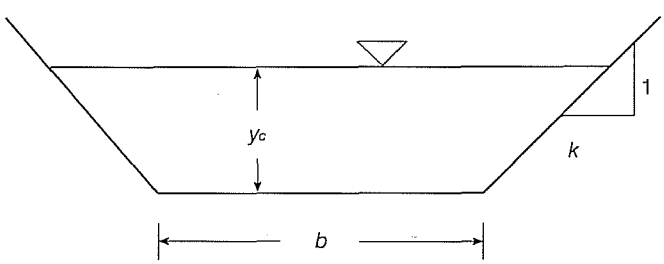
$$A_c = by_c + ky_c^2 \tag{2}$$

$$B_c = b + 2ky_c \tag{3}$$

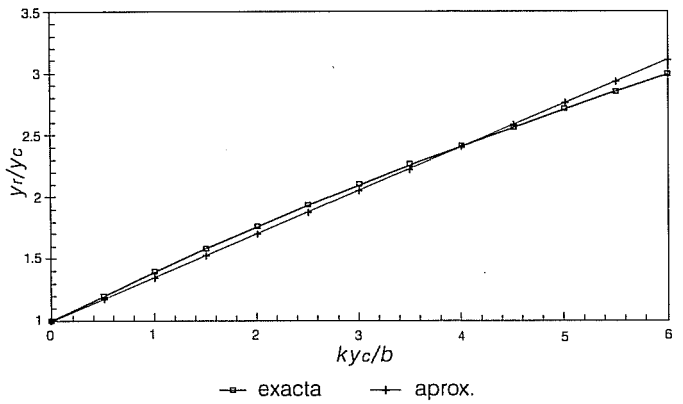
donde b (m) es el ancho de plantilla, k (adimensional) el talud de las paredes y y_c (m) el tirante crítico. Sustituyendo (2 y 3) en (1):

$$\alpha \frac{Q^2}{g} = \frac{(by_c + ky_c^2)^3}{b + 2ky_c} \tag{4}$$

1. Definición de variables geométricas (sección trapecial)



2. Relación y_r/y_c contra ky_c/b



transformando algebraicamente se puede llegar a:

$$\frac{y_r}{y_c} = \frac{1 + \dfrac{ky_c}{b}}{\left(1 + 2\dfrac{ky_c}{b}\right)^{1/3}} \qquad (5)$$

donde:

$$y_r = \left(\frac{\alpha Q^2}{b^2 g}\right)^{1/3} \qquad (6)$$

y_r es el tirante crítico en un canal rectangular con el mismo ancho de plantilla que el canal trapecial.

Si se hace una gráfica (ilustración 2) de la ecuación 5 se observa que en el rango de $0.0 \leq ky_c/b \leq 6.0$ se puede aproximar con una línea recta ($ky_c/b = 0.0$ corresponde a un canal rectangular, mientras que $ky_c/b = 6.0$ corresponde a un canal prácticamente triangular). En el cuadro 1 se han anotado los valores de y_r/y_c para varios valores de ky_c/b De la observación de las dos primeras columnas del cuadro1 se concluye que se puede establecer preliminarmente la relación siguiente:

$$\frac{y_r}{y_c} \approx 1 + 0.35\,\frac{ky_c}{b} \qquad (7)$$

Si con esta ecuación se estiman las relaciones de y_r/y_c se tienen los valores de la cuarta columna del mismo cuadro. Como una medida de la bondad del ajuste de (7), se puede calcular el error relativo (quinta columna) con:

$$e_r\,\% = \frac{\left(\dfrac{y_r}{y_c}\right)_{cal} - \dfrac{y_r}{y_c}}{\dfrac{y_r}{y_c}}\,100 \qquad (8)$$

para los valores considerados se obtienen los errores máximos:

$$e_r\%)_{min} = -3.17\% \text{ y } e_r\%)_{max} = 4.13\%$$

mismos que implican errores positivos y negativos máximos, más o menos del mismo orden. Si para fines de cálculo, se admiten valores absolutos máximos del 5%, los mencionados serán aceptables. La ecuación 7 se puede generalizar a:

$$\frac{y_r}{y_c} = a_0 + a_1\,\frac{ky_c}{b} \qquad (9)$$

aplicando regresión lineal (mínimos cuadrados), a los datos del cuadro 1, se encuentra que: $a_0 = 1.0637$, $a_1 = 0.3286$ y $r = 0.9982 \cong 1$. Resultados que confirman la suposición inicial de una relación lineal entre ky_c/b y y_r/y_c. Como se busca el valor de y_c, si se multiplica la ecuación 9 por y_r/y_c, se puede despejar:

$$y_c = \frac{2y_r}{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4a_1\,\dfrac{ky_r}{b}}} \qquad (10)$$

Se puede observar que (10) no podrá reportar $y_c \cong y_r$ para $ky_r/b \cong 0$, por lo que es conveniente adoptar $a_0 = 1$ y un nuevo valor de a_1. Con objeto de revisar el valor

1. Establecimiento de la relación preliminar

$\frac{ky_c}{b}$	$\frac{y_r}{y_c}$	$\frac{ky_r}{b}$	$\left(\frac{y_r}{y_c}\right)_{cal}$	$e_r\%$
0	1	0	1	0
0.5	1.1906	0.5953	1.1750	-1.31
1.0	1.3867	1.3867	1.3500	-2.65
1.5	1.5749	2.3624	1.5250	-3.17
2.0	1.7544	3.5088	1.7000	-3.10
2.5	1.9261	4.8153	1.8750	-2.65
3.0	2.0910	6.2731	2.0500	-1.96
3.5	2.2500	7.8750	2.2250	-1.11
4.0	2.4037	9.6150	2.4000	-0.16
4.5	2.5529	11.4879	2.5750	0.87
5.0	2.6979	13.4893	2.7500	1.93
5.5	2.8391	15.6153	2.9250	3.02
6.0	2.9770	17.8622	3.1000	4.13

2. Resultados de la ecuación 12 con $\alpha_1 = 0.35$

σ	σ_r	$\sigma)_{cal}$	e_r%
0	0	0	0
0.5	0.5953	0.5058	1.15
1.0	1.3867	1.0215	2.15
1.5	2.3624	1.5363	2.42
2.0	3.5088	2.0450	2.25
2.5	4.8153	2.5462	1.85
3.0	6.2731	3.0395	1.32
3.5	7.8750	3.5253	0.72
4.0	9.6150	4.0039	0.10
4.5	11.4879	4.4760	-0.53
5.0	13.4893	4.9418	-1.16
5.5	15.6153	5.0419	-1.78
6.0	17.8622	5.8567	-2.39

de a_1 y de comparar más fácilmente los resultados calculados con (10) con los de otras fórmulas aproximadas, es conveniente expresarla en forma adimensional. Si ambos lados de la ecuación 10 se multiplican por k/b, y se introducen los parámetros:

$$\sigma = \frac{ky_c}{b} \text{ y } \sigma_r = \frac{ky_r}{b} \tag{11}$$

la ecuación 10 queda:

$$\sigma = \frac{2\sigma_r}{1+\sqrt{1+4\alpha_1\sigma_r}} \tag{12}$$

Para adoptar un valor adecuado para el parámetro α_1 se propusieron diversos valores y se aplicó la fórmula adimensional aproximada 12. Se confirmó que, para dar errores balanceados (o sea, errores máximos positivos y negativos de aproximadamente el mismo orden), en el rango de aplicación de la fórmula, es adecuado adoptar $\alpha_1 = 0.35$. Los cálculos para dicho valor se consignan en el cuadro 2.

En el cuadro 2 se observa que los errores resultan bastante balanceados, los valores absolutos máximos son del orden de 2.4 %. La media del valor absoluto del error es 1.37 %. Por tanto la ecuación definitiva es:

$$y_c = \frac{2y_r}{1+\sqrt{1+1.4\,\frac{ky_r}{b}}} \tag{13}$$

Comparación con otras fórmulas

– Fórmula de Agroskin

La fórmula propuesta por Agroskin se puede escribir [Gardea, 1990]:

$$y_c = \left(1 - \frac{\sigma_r}{3} + 0.105\,\sigma_r^2\right) y_r \tag{14}$$

en forma adimensional:

$$\sigma = \left(1 - \frac{\sigma_r}{3} + 0.105\,\sigma_r^2\right) \sigma_r \tag{15}$$

Utilizando los mismos valores de σ_r y σ considerados antes en la fórmula propuesta en este trabajo, se obtienen los resultados del cuadro 3. Se puede observar ahí que la fórmula de Agroskin no es adecuada para la totalidad del rango propuesto, sólo es conveniente para valores de $\sigma \leq 1.0$, o equivalentemente $\sigma_r \leq 1.39$.

– Fórmula de Straub

Straub propuso (French, 1988) que, si $0.1 < Q/b^{2.5} < 0.4$ (equivalente a $0.101k < \sigma_r < 0.254k$), donde Q y b se expresan en unidades del S.I., el tirante crítico en un canal de sección trapecial se puede estimar con:

$$y_c = 0.81\left(\frac{\alpha Q^2}{k^{0.75}b^{1.25}g}\right)^{0.27} - \frac{b}{30k} \tag{16}$$

3. Resultados de la fórmula de Agroskin

σ	σ_r	$\sigma)_{cal}$	e_r%
0	0	0	0
0.5	0.5953	0.4993	-0.14
1.0	1.3867	1.0257	2.57
1.5	2.3624	1.8864	25.76
2.0	3.5088	3.9409	97.04
2.5	4.8153	8.8099	252.39
3.0	6.2731	19.0759	535.86
3.5	7.8750	38.4823	999.49
4.0	9.6150	72.1323	1703.31
4.5	11.4879	126.6868	2715.26
5.0	13.4893	210.5626	4111.25
5.5	15.6153	334.1305	5975.10
6.0	17.8622	509.9126	8398.54

y que, si $Q/b^{2.5} < 0.1$ ($\sigma_r < 0.101k$), el tirante se puede aproximar con el correspondiente al canal rectangular del mismo ancho de plantilla. La ecuación 16 se puede escribir:

$$\sigma = 0.81\, y_r^{0.0125}\sigma_r^{0.7975} - \frac{1}{30} \qquad (17)$$

En la ecuación 17 no se puede eliminar la expresión dimensional de y_r; sin embargo, para valores prácticos de 0.01 a 100 m el valor de $y_r^{0.0125}$ va de 0.9441 a 1.0593, con lo que se puede adoptar $y_r = 1$ m, sin introducir un gran error. Aplicando la Ecuación 17 a los mismos datos, se obtienen los resultados del cuadro 4.

Los resultados de la fórmula de Straub, indican que es una mejor fórmula que la de Agroskin, no obstante reporta valores adecuados cuando $\sigma \leq 1.5$ ó $\sigma_r \leq 2.36$.

– Fórmula de Swamee

La fórmula de Swamee (1993) es:

$$y_c = \left(\left(\frac{gb^2}{\alpha Q^2}\right)^{0.7} + \left(\frac{gk^2}{2\alpha Q^2}\right)^{0.42}\right)^{-0.476} \qquad (18)$$

la cual se puede escribir adimensionalmente:

$$\sigma = \frac{\sigma_r}{\left(1 + \left(\frac{\sigma_r^2}{2}\right)^{0.42}\right)^{1/2.1}} \qquad (19)$$

Aplicando (19) se obtienen los resultados del cuadro 5.

4. Resultados de la fórmula de Straub

σ	σ_r	$\sigma)_{cal}$	e_r%
0	0	0	0
0.5	0.5953	0.5022	0.45
1.0	1.3867	1.0180	1.80
1.5	2.3624	1.5744	4.96
2.0	3.5088	2.1709	8.54
2.5	4.8153	2.8038	12.15
3.0	6.2731	3.4700	15.67
3.5	7.8750	4.1666	19.05
4.0	9.6150	4.8914	22.29
4.5	11.4879	5.6425	25.39
5.0	13.4893	6.4180	28.36
5.5	15.6153	7.2167	31.21
6.0	17.8622	8.0372	33.95

5. Resultados de la fórmula de Swamee

σ	σ_r	$\sigma)_{cal}$	e_r%
0.0	0	0	0
0.5	0.5953	0.4934	-1.33
1.0	1.3867	1.0008	0.08
1.5	2.3624	1.5159	1.06
2.0	3.5088	2.0332	1.66
2.5	4.8153	2.5504	2.01
3.0	6.2731	3.0666	2.22
3.5	7.8750	3.5816	2.33
4.0	9.6150	4.0954	2.38
4.5	11.4879	4.6079	2.40
5.0	13.4893	5.1195	2.39
5.5	15.6153	5.6300	2.36
6.0	17.8622	6.1398	2.33

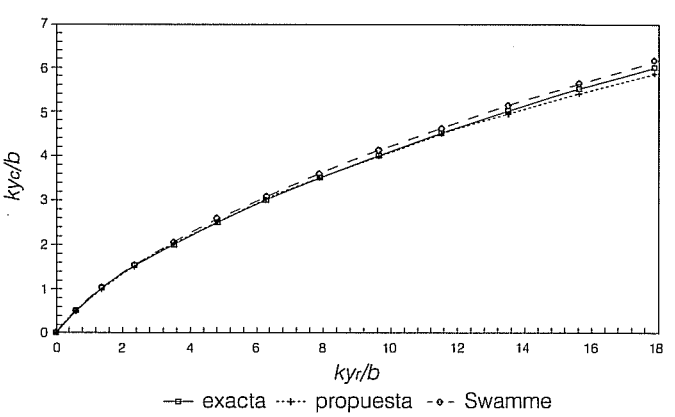
En la última columna del cuadro 5 se puede observar que la fórmula de Swamee reporta errores pequeños con valores absolutos menores o iguales a 2.40%, con una media de 1.74%. Los errores son, en general, positivos; o sea, la fórmula propuesta por este investigador tiende a sobrestimar el valor del tirante.

En la ilustración 3 se muestran los ajustes de la fórmula aquí propuesta y la de Swamee a la ecuación exacta (ecuación 5 multiplicada por ky_c/b).

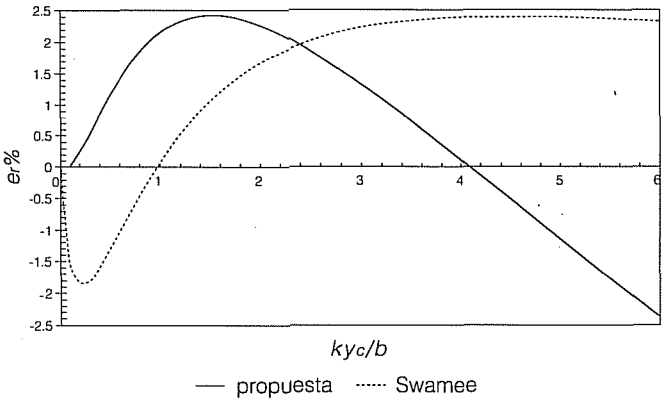
– Revisión adicional de la fórmula de Swamme y la propuesta

En una revisión posterior de los errores de la fórmula de Swamee y la aquí propuesta se hizo variar σ de 0.0 a 6.0 y de 0.1 en 0.1. Se encontró que la de Swamee tiene una media del valor absoluto del error igual a 1.84% y una desviación estándar del error igual a 1.28%.

3. Ajuste de la fórmula de Swamee y la propuesta



4. Errores de la fórmula de Swamee y la propuesta



La fórmula subestima y_c de $0 \leq \sigma \leq 0.968$ ($0 \leq \sigma_r \leq 1.33$) con un error mínimo igual a -1.85% (en $\sigma = 0.2$ ó $\sigma_r = 0.21$); así mismo sobrestima y_c de $0.968 < \sigma \leq 6.0$ ($1.33 \leq \sigma_r \leq 17.86$) con un error máximo igual a 2.40% (en $\sigma = 4.5$ ó $\sigma_r = 11.49$). La fórmula propuesta presenta una media de 1.38% y una desviación estándar de 1.47%. Sobrestima y_c en el rango de $0 < \sigma \leq 4.078$ ($0 \leq \sigma_r \leq 9.90$) con error máximo de 2.42% (en $\sigma = 1.5$ ó $\sigma_r = 2.36$) y subestima y_c de $4.078 < \sigma \leq 6.0$ ($9.90 \leq \sigma_r \leq 17.86$) con un error mínimo igual a -2.39% (en $\sigma = 6.0$ ó $\sigma_r = 17.86$). En la ilustración 4 se presentan los errores cometidos al aplicar ambas fórmulas.

Conclusiones

La fórmula de Agroskin y la de Straub son buenas sólo para valores de σ menores o iguales a 1.0 y 1.5, respectivamente.

Las mejores fórmulas resultaron ser la de Swamee y la propuesta. Los rangos de aplicación de ambas son prácticamente los mismos; pues la fórmula de Swamee (1993) –utilizando la notación del presente trabajo– se aplica al rango: $0.0 \leq \sigma_r \leq 21.54$, aquí se ha considerado el rango: $0.0 \leq \sigma_r \leq 17.86$.

Se han identificado con suficiente detalle las características de los errores reportados por la fórmula de Swamme y la propuesta. Por ejemplo, en el rango de interés, equivalente al rango $0.0 \leq \sigma \leq 6.0$, la de Swamee reporta una media del valor absoluto del error relativo de 1.84% y un error relativo máximo de 2.40%; mientras que la fórmula propuesta presenta 1.38% y 2.42%, respectivamente.

De acuerdo al estudio de los errores, y a que se considera que la aplicación de la fórmula propuesta (13) es más sencilla que la de Swamee (18), se recomienda la utilización de la primera.

Además, se puede observar que una figura similar a la de la ilustración 3, en la que se dibuje sólo la relación exacta entre ky_r/b y ky_c/b, puede ser usada para estimar gráficamente al tirante crítico en canal trapecial.

La ecuación 13 es válida inclusive para cuando la sección trapecial se convierte en rectangular ($k = 0$). Sin embargo, se puede obtener una ecuación equivalente que puede aplicarse en su lugar, siempre que $k > 0$. Esto es, si se despeja directamente y_c de (9) y se sustituyen los valores adoptados de los parámetros α_0 y α_1 se obtiene:

$$y_c = \frac{b}{0.7k}\left(\sqrt{1 + 1.4\,\frac{ky_r}{b}} - 1\right) \qquad (20)$$

Agradecimientos

A los revisores. Una de las notas lleva a considerar conveniente la inclusión de la ecuación 20, pues podría ser preferida por algunos calculistas.

Al maestro Humberto Gardea, por haberle propuesto al autor, cuando éste era su alumno, un problema que eventualmente desencadenó este trabajo.

Recibido: febrero, 1997
Aprobado: agosto, 1997

Referencias

French, R. H. 1988. *Hidráulica de canales abiertos*. México D.F.: McGraw Hill 724p.

Gardea, H. 1990. *Apuntes de hidráulica de canales* Capítulos I al V, México D.F.: Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. 143p.

Sotelo, G. 1993. *Apuntes de Hidráulica II*. México D.F.: Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. 508p.

Swamee, P. K. 1993. Critical depth equations for irrigation canals. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* 119(2):400-409.

Abstract

Martínez-Martínez, S.I. "Approximate calculation of critical depth in trapezoidal channels". Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish). Vol XIII. Num. 2, pages 67-72. May-August, 1998.

An equation capable of approximating the calculation of the critical depth in open channels of trapezoidal section is provided. This equation considers a practically linear relation between two adimensional parameters. The proposed equation is compared with other similar equations. There are certain advantages in favor of the equation proposed with respect to others in the literature.

Key words: *Open channel hydraulics, critical flow, trapezoidal section, approximate equations, critical depth.*

Dirección institucional de autores:

Sergio Ignacio Martínez Martínez

Universidad Autónoma de Aguascalientes
Centro de Ciencias del Diseño y de la Construcción,
Av. Universidad No. 940, 20100 Aguascalientes, Ags.
Teléfono: 01 (49) 12 33 45 Extensión 434
Email: simartin@correo.uaa.mx