

Nota técnica

Un método para estimar la atenuación de avenidas en embalses

Sergio Ignacio Martínez Martínez

Universidad Autónoma de Aguascalientes

Se presenta un método simplificado para estimar la atenuación que sufre una onda de avenida al pasar por un embalse con área superficial variable y vertedor u orificio de control y/o excedencias. El problema del tránsito hidrológico de una avenida de un solo pico se reduce a plantear y solucionar una ecuación algebraica y a aplicar una corrección. El método es válido para la mayoría de los casos prácticos y lleva a resultados comparables a los del tránsito convencional.

Palabra clave: avenida, tránsito de avenidas, tránsito hidrológico, embalse, vertedor, orificio, método aproximado.

Introducción

Al diseñar o revisar un embalse, es de interés determinar su efecto de atenuación sobre una onda de avenida. La atenuación de una avenida al pasar por un embalse se puede definir como la relación del gasto máximo de salida, O_p , con el gasto máximo de entrada, I_p , o sea: O_p/I_p (ilustración 1). Si el valor de la atenuación es cercano a la unidad, entonces el embalse presenta un efecto atenuador –o regularizador– muy pequeño; si, por el contrario, es cercano a cero, entonces el embalse presenta un gran efecto sobre la avenida. A pesar de que durante muchos años han aparecido métodos numéricos y gráficos para transitar una onda de avenida por un embalse, no dan directamente el valor de la atenuación, pues son típicamente variaciones de tránsitos tabulares del hidrograma completo que van proporcionando la solución paso a paso y que se pueden continuar, inclusive, más allá del tiempo correspondiente al gasto máximo de salida. (Kohler, 1958), (Viessman *et al*, 1977), (Sánchez, 1978), (IIE, 1980, 1983), (USBR, 1982), (Campos, 1987), (Aparicio, 1992), (Basha, 1994) (Chow *et al*, 1994). Sin embargo, a veces es necesario tener una idea rápida, por ejemplo, de la longitud de la cresta vertedora necesaria para conseguir un cierto valor de la atenuación. Entonces lo usual es proponer diferentes longitudes y hacer repetidas veces el tránsito de la manera convencional, ocupando mucho tiempo en correr programas que suelen necesitar de muchos datos. Un procedimiento

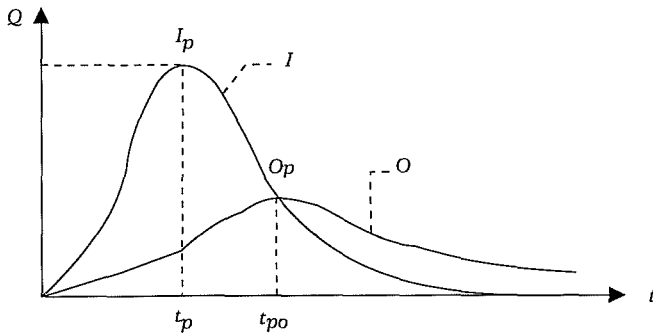
opcional podría consistir en utilizar primero un método simplificado que, aunque sólo dé un resultado aproximado, permita ahorrar tiempo y esfuerzo al evaluar alternativas preliminares; luego podrá utilizarse el método convencional con la alternativa definitiva.

Durante las últimas tres décadas se han propuesto varios métodos de escritorio: numéricos, gráficos o semigráficos, para estimar de una manera relativamente directa la atenuación o resolver otros problemas relacionados. (Overton, 1966), (Sarginson, 1973), (Hager y Sinniger, 1985), (Horn, 1987), (Akan, 1989, 1990), (Kessler y Diskin, 1991), (McEnroe, 1993), (Akan y Antoun, 1994), (Basha, 1994, 1995), (Martínez, 1995). No obstante, ninguno de los métodos referidos contempla, por sí solo, las características que en este trabajo se presentan, como son: la consideración de una avenida de un solo pico y de cualquier forma, embalse no lineal (donde el gasto de salida no es proporcional al volumen almacenado) a punto de derramar, vertedor de cresta libre u orificio como estructura de excedencias, y un método numérico aplicable a un caso general.

Desarrollo

Se presentan aquí, por tanto, el tránsito convencional utilizado, el proceso de adopción del tránsito simplificado, el proceso de contrastación del tránsito simplificado con el tránsito convencional y, finalmente, el algoritmo del tránsito simplificado y su aplicación a dos ejemplos concretos.

1. Hidrogramas de entrada y salida en un embalse



Tránsito convencional

La ecuación diferencial que gobierna el incremento de agua almacenada en un embalse durante el paso de una avenida puede derivarse de la ecuación de continuidad:

$$\frac{dV}{dt} = I - O \quad (1)$$

donde dV/dt representa la rapidez con que cambia el volumen almacenado en el embalse con respecto al tiempo, al estar sujeto el embalse a un gasto de entrada, I y un gasto de salida, O instantáneos.

La dependencia del volumen del embalse con respecto a la elevación del agua dentro de él, o sea su curva de elevaciones-capacidades, puede expresarse así.

$$V = Kh^N \quad (2)$$

donde K y N son constantes de ajuste determinadas a partir del levantamiento topográfico del vaso, y h es la elevación de la superficie libre del agua dentro del embalse, medida usualmente desde el fondo del embalse.

Estructuras de excedencias

1. Vertedor

Si la salida del embalse está dada sólo por un vertedor de cresta libre (Sotelo, 1980), entonces el gasto de salida, en m^3/s , estará expresado por la ecuación:

$$O = CL(h - h_0)^{1.5} \quad (3)$$

donde h_0 es la elevación, en m, de la cresta del vertedor. La ecuación es válida para $h \geq h_0$ (para cualquier

otra elevación el gasto de salida es nulo). C es el coeficiente de descarga, cuyo valor numérico es del orden de $2.0 m^{0.5}/s$ y L es la longitud de la cresta del vertedor, en metros.

2. Orificio

Si la salida del embalse está dada sólo por uno o varios orificios del mismo tamaño [ver: (Sotelo, 1980)], entonces el gasto de salida, en m^3/s , estará expresado por la ecuación:

$$O = nC_d A_o \sqrt{2g} (h - h_0)^{0.5} \quad (4)$$

donde h_0 es la elevación, en m, del centroide del orificio u orificios. La ecuación es válida para $h \geq h_0$ y para cargas $h - h_0$ suficientemente grandes en comparación con la dimensión vertical del orificio (para cualquier otra elevación el gasto de salida es nulo); n es el número de orificios, C_d es el coeficiente de descarga, cuyo valor numérico es del orden de 0.6; A_o es el área del orificio, en m^2 y g es la aceleración de la gravedad.

3. Ecuación del tránsito

Las ecuaciones 3 y 4 se pueden escribir en la forma:

$$O = C_s (h - h_0)^{N_s} \quad (5)$$

donde, para el vertedor $C_s = CL$ y $N_s = 1.5$; y para el orificio $C_s = nC_d A_o (2g)^{0.5}$ y $N_s = 0.5$.

Sustituyendo 2) y 5) en 1):

$$\frac{d(Kh^N)}{dt} = I - C_s (h - h_0)^{N_s}; h \geq h_0 \quad (6)$$

$$KNh^{N-1} \frac{dh}{dt} = I - C_s (h - h_0)^{N_s}; h \geq h_0 \quad (7)$$

En la última ecuación KNh^{N-1} representa el área superficial, A , del embalse a la elevación h . Reescribiendo:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{I - C_s (h - h_0)^{N_s}}{KNh^{N-1}}; h \geq h_0 \quad (8)$$

Dado que en el caso general I es una función arbitraria del tiempo t , la ecuación diferencial 8 no se puede resolver analíticamente y se recurre a algún método numérico. En esencia, para resolver la ecuación 8 se discretiza, se va resolviendo paso a paso, partiendo de una condición inicial conocida y con un incremento de tiempo Δt adecuado para obtener una solución apropiada y lo suficientemente exacta. Existen varios méto-

dos para resolverla. Aquí, con el fin de obtener los mejores datos posibles para ser contrastados con el modelo propuesto, se abordó su solución con el método de Runge-Kutta de cuarto orden (Kreyszig, 1981), propuesto por Campos (1987) para hacer el tránsito de avenidas en embalses.

4. Ecuación adimensional del tránsito

Para facilitar el análisis y la generalización de resultados es conveniente expresar el tránsito de avenidas en forma adimensional, pues se reduce así el número de parámetros del problema y se sigue conservando el sentido físico. Además, para simplificar la contrastación de modelos aproximados es conveniente considerar sólo hidrogramas de entrada de una forma geométrica simple, tal como la triangular, dado que con ello se evita el efecto de hidrogramas de forma arbitraria (ilustración 2).

La ecuación 8, escrita en forma adimensional (Martínez, 1995) es:

$$\frac{dh^*}{dt^*} = \frac{I^* - R_g (h^* - 1)^{N_s}}{R_v (h^*)^{N-1}}; h^* \geq 1 \quad (9)$$

donde los parámetros adimensionales reescritos aquí tomando en cuenta las definiciones de C_s y N_s , son: $h^* = h/h_0$, elevación adimensional; $t^* = t/t_p$, tiempo adimensional; $I^* = I/I_p$, gasto de entrada adimensional; $R_g = (C_s h_0 N_s)/I_p$, razón de gastos; $R_v = (KNh_0^N)/(I_p t_p)$, razón de volúmenes; N , exponente de la ecuación de elevaciones-capacidades, y N_s exponente de la ecuación de descarga. La ecuación 9 indica que en los problemas de tránsito de avenidas en los que se tienen los mismos parámetros R_g , R_v y N y si la avenida adimensional $I^* = I^*(t^*)$ es idéntica, entonces la evolución de las elevaciones del agua dentro del embalse con

respeto al tiempo, $h^* = h^*(t^*)$, será idéntica. Esto último tiene una gran importancia práctica, pues al resolver un tránsito adimensional se está resolviendo un número infinito de tránsitos.

Dado que aquí, en vez de interesar la evolución completa de las elevaciones o los gastos de salida sólo interesa en última instancia la atenuación, los siete parámetros adimensionales pueden condensarse en R_g , R_v , N , T_i y N_s . El parámetro T_i , tiempo adimensional de recesión, se define por:

$$T_i = \frac{t_b - t_p}{t_p} \quad (10)$$

donde t_b es el tiempo base del hidrograma de entrada y t_p su tiempo de pico (ilustración 2). Las cantidades dimensionales que definen al hidrograma triangular considerado intervienen en R_g , R_v y T_i . Para contrastar posteriormente los resultados de las simplificaciones planteadas con los del tránsito convencional, se eligieron al azar, para cada caso, diez juegos representativos de datos y se efectuaron los tránsitos adimensionales utilizándose un Δt^* igual a 0.05 (cuadros 1 y 2).

Adopción del tránsito simplificado

Ecuación lineal del tránsito

Una posible simplificación teórica (Martínez, 1995) de la ecuación 8, consiste en escribirla en la forma:

$$\frac{dh}{dt} = ah + bu(t) \quad (11)$$

donde a y b son parámetros constantes y u es una función arbitraria del tiempo. La ecuación anterior modela un sistema lineal de orden 1 (Auslander *et al*, 1976). Su solución analítica por $u = cte$ es:

$$h = buT[1 - e^{at}] + h(0)e^{at} \quad (12)$$

donde $T = -1/a$, y $h(0)$ es la elevación en el embalse para el $t = 0$.

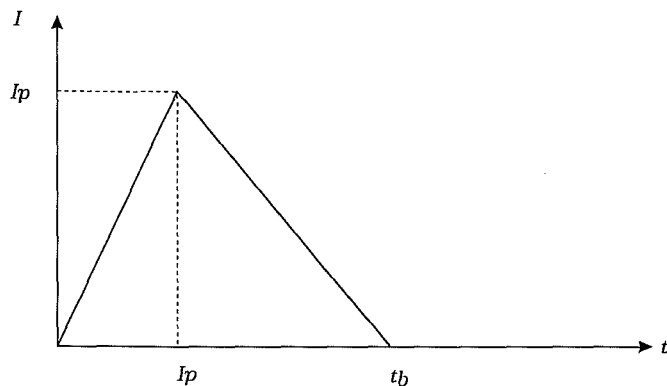
Si en el miembro derecho de la ecuación 8 se separan los términos de entrada y salida, se tiene:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{I}{KNh^{N-1}} - \frac{C_s (h - h_0)^{N_s}}{KNh^{N-1}} \quad (13)$$

luego, si al término de salida se le multiplica y divide por h , y se reordena se obtiene:

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{C_s (h - h_0)^{N_s}}{KNh^N} h + \frac{I}{KNh^{N-1}} \quad (14)$$

2. Hidrograma triangular



1. Tránsitos adimensionales en embalses con vertedor (10 juegos para contrastar resultados)

Juego	R_o	R_v	N	T_i	O_o/I_p
1	54.50	0.94	4.8934	1.8	0.96627
2	457.84	68.19	9.1707	2.6	0.55737
3	76.17	66.66	10.3013	3.5	0.25368
4	723.50	7.66	7.6183	1.1	0.95158
5	514.06	131.27	3.8635	1.0	0.23902
6	142.97	59.20	5.5885	3.9	0.44464
7	164.91	2.23	6.3244	2.7	0.96938
8	452.32	179.26	1.4761	2.1	0.24275
9	169.15	129.90	7.5964	4.2	0.27044
10	36.32	5.66	9.3941	1.4	0.61962

2. Tránsitos adimensionales en embalses con orificio (10 juegos para contrastar resultados)

Juego	R_o	R_v	N	T_i	O_o/I_p
1	0.0898	0.4444	1.0000	2.0	0.14814
2	0.4000	0.6400	1.5000	1.0	0.35145
3	0.7000	1.5000	5.4000	1.8	0.36474
4	0.3500	3.0000	8.4000	3.5	0.16830
5	0.2835	5.2300	11.2000	4.0	0.11447
6	0.3700	6.4400	1.2000	2.1	0.15993
7	0.8500	2.4400	3.2000	2.9	0.43954
8	0.8100	2.2300	6.7000	4.5	0.41217
9	0.7900	1.1800	9.0000	2.5	0.39265
10	0.7000	0.3880	7.1000	1.7	0.44609

además, si en la ecuación anterior, se hace:

$$a = - \frac{C_s (h - h_o)^{N_s}}{KNh^N} \quad (15)$$

$$b = \frac{1}{KNh^{N-1}} \quad (16)$$

$$u = 1 \quad (17)$$

entonces la ecuación 14 toma la forma de la ecuación 11. El parámetro a expresa –con signo negativo– la relación entre el gasto de salida y el producto del área superficial por la elevación del agua en el embalse, mientras que b representa el recíproco del área superficial del embalse. Según las ecuaciones 15 y 16, los parámetros a y b dependen de h , y ésta varía durante la avenida; sin embargo, la ecuación 12 requiere de que a y b sean constantes; Martínez (1995) propuso, para el caso del vertedor, una forma de calcular valo-

res constantes de a y b que pueden considerarse como representativos de los valores numéricos que, en realidad, adquieren dichos parámetros durante el paso de la avenida. Aquí, el criterio de Martínez se aplica también al caso del orificio. El parámetro a se calcula por:

$$a = - \frac{C_s (h_{\max} - h_o)^{N_s}}{2KNh_{\max}^N} \quad (15')$$

donde $h_{\max}$ es la elevación máxima en el embalse durante la avenida. Una vez calculado a , de la ecuación:

$$a = - \frac{C_s (h_m - h_o)^{N_s}}{KNh_m^N} \quad (15'')$$

se puede calcular la elevación media durante la avenida, h_m . Derivando la ecuación 15'' con respecto a h_m , e igualando a cero, se encuentra que la elevación, h_c , que hace mínimo al parámetro a es:

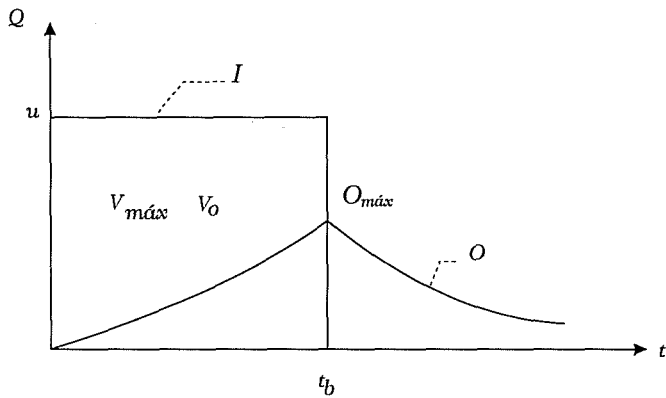
$$h_c = \frac{Nh_o}{N - N_s}; N - N_s \neq 0 \quad (18)$$

Esto significa que cuando exista un $h_c > 0$ habrá dos valores de h_m que reporten el mismo valor de a ; en caso contrario, sólo existirá un valor de h_m . Cuando la ecuación 15'' tuviera dos raíces, Martínez (1995) escoge la menor, que cumple con $h_m < h_{\max}$. Finalmente, por $h = h_m$ se calcula mediante la ecuación 16 el parámetro b . Conviene notar que cuando se escoge la menor de dos raíces, se está obteniendo un parámetro b relativamente grande –o sea, un área superficial relativamente pequeña–, lo que dará lugar a una estimación del gasto máximo regularizado, $O_{\max}$, relativamente grande; por tanto, es de esperarse que el método de Martínez tienda a arrojar valores de $O_{\max}$ más grandes que los valores O_p correspondientes, obtenidos aplicando el tránsito convencional. Por último, para el orificio ($N_s = 0.5$) la ecuación 18 restringe aún más que para el vertedor ($N_s = 1.5$) los valores de h_m , pues para h_o y N idénticos, h_o es más pequeña para el orificio que para el vertedor; es de esperarse que para el orificio la estimación de los gastos máximos regularizados sea aún mayor que la correspondiente al caso del vertedor.

Hidrogramas transformados

Para mantener el método aproximado lo más sencillo posible, Martínez (1995) propuso que u fuera constante, con lo que la solución de la ecuación 14 es la ecuación 12. La consideración de u constante supone un

3. Hidrogramas transformados de entrada y salida



hidrograma transformado de forma rectangular. El mismo autor (1995) encontró que si el hidrograma original es de forma triangular, tal como el de la ilustración 2, entonces $u = I_p/2$ y el tiempo base, t_b , del hidrograma transformado, es igual al del hidrograma original (el área bajo los dos hidrogramas es idéntica). Sin embargo, el hecho de que u sea constante introduce un error, dado que dos hidrogramas triangulares con iguales I_p y t_b y diferente t_p darán lugar a la misma solución; Martínez (1995) propuso hacer una corrección posterior de este error, tomando en cuenta –entre otros– el valor de T_r . La ecuación 12 es válida dentro del intervalo $0 \leq t \leq t_b$ y proporciona la evolución de h con respecto a t ; en ella, h siempre aumenta cuando t aumenta, cumpliéndose que $h = h_{máx}$ en $t = t_b$. En cuanto la entrada cesa, o sea, cuando u se hace nulo, la elevación del agua sigue la ecuación $h = h_{máx} e^{a(t_b-t)}$. Si además $h(0) = h_0$, la ecuación 12 se podrá escribir:

$$h_{máx} = buT[1 - e^{at_b}] + h_0 e^{at_b} \quad (19)$$

Por último, mediante la ecuación 5 se podrá calcular para cualquier h el gasto de salida; así, para $h_{máx}$ se podrá calcular $O_{máx}$. Los hidrogramas transformados de entrada y salida se esquematizan en la ilustración 3.

Modelo de Martínez (1995)

Una forma de comparar resultados aproximados con otros que se consideren exactos, se puede basar en el cálculo del error relativo (véase, por ejemplo: (Kreyszig, 1981). En este trabajo se comparan los resultados de un método aproximado con los obtenidos aplicando el tránsito convencional, o sea que el error relativo es:

$$e, \% = \frac{O_{máx}/I_p - O_p/I_p}{N - N_s} 100 \quad (20)$$

En el cuadro 3 se consigna un resumen de los resultados obtenidos con la ecuación 18 y el criterio que sigue Martínez (1995) para estimar a , b y u , para los diez juegos de datos correspondientes a cada estructura. Se encontró, tal como se esperaba, que los resultados para el orificio presentaban errores relativos aún más grandes que para el vertedor.

Modelo propuesto

En la búsqueda de un modelo más sencillo se notó que los hidrogramas transformados del modelo de Martínez (1995), para el caso del vertedor (ilustración 3), eran un rectángulo –el de entrada– y una curva aproximadamente lineal –el de salida– que crece con el tiempo desde un valor nulo hasta $O_{máx}$. De acuerdo con la ecuación de continuidad, de la ilustración 3, el volumen almacenado en el embalse por arriba del nivel de salida, $V_{máx} - V_o$, al tiempo del gasto de salida máximo, puede calcularse como el área entre ambos hidrogramas, o sea:

$$ut_b - \frac{1}{2} O_{máx} t_b = V_{máx} - V_o \quad (21)$$

Esta última ecuación se puede escribir en forma adimensional, dividiendo entre V_o :

$$\frac{ut_b}{V_o} - \frac{O_{máx} t_b}{2V_o} = \frac{V_{máx}}{V_o} - 1 \quad (22)$$

$$\frac{ut_b}{V_o} \left(1 - \frac{O_{máx}}{2u}\right) = \frac{V_{máx}}{V_o} - 1 \quad (22')$$

además, de las ecuaciones 2 y 5:

$$\frac{O_{máx}}{2u} = \frac{C_s (h_{máx} - h_0)^{Ns}}{2u} = \frac{C_s}{2u} h_0^{Ns} \left(\frac{h_{máx}}{h_0} - 1\right)^{Ns} \quad (23)$$

$$\frac{V_{máx}}{V_o} = \frac{Kh_{máx}^N}{Kh_0^N} = \left(\frac{h_{máx}}{h_0}\right)^N \quad (24')$$

si se define:

$$K_g = \frac{C_s}{2u} h_0^{Ns} \quad (25)$$

$$K_v = \frac{ut_b}{V_o} = \frac{ut_b}{Kh_0^N} \quad (26)$$

finalmente, sustituyendo 23, 24, 25 y 26 en 22', se obtiene:

$$K_v \left(1 - K_g \left(\frac{h_{\max}}{h_0} \right) - 1 \right)^{N_s} = \left(\frac{h_{\max}}{h_0} \right)^{N_s} - 1 \quad (27')$$

Esta ecuación se puede resolver numéricamente para $h_{\max}/h_0$ mediante varios métodos. Un eficiente para ello es el de Newton-Raphson (Fenves, 1976). Una vez calculado $h_{\max}/h_0$ se puede obtener la atenuación aproximada, $O_{\max}/(2u)$, con la ecuación 23, y luego obtener $O_{\max}$.

Para poder comparar los resultados de este modelo con los del tránsito convencional se necesita obtener la relación entre los parámetros de la ecuación de tránsito adimensional y los parámetros K_g y K_v , antes definidos. Para el hidrograma triangular, tal como hemos visto, $u = I_p/2$, y de la definición de R_g :

$$K_g = \frac{C_s h_0^{N_s}}{2u} = \frac{C_s h_0^{N_s}}{I_p} = R_g \quad (28)$$

además, de la ecuación 10 y de la definición de R_v :

$$K_v = \frac{u t_b}{K h_0^N} = \frac{I_p t_b}{2 K h_0^N} = \frac{I_p t_b N(T_i + 1)}{2 K N h_0^N} = \frac{N(T_i + 1)}{2 R_v} \quad (29)$$

Una vez que se hicieron las corridas del modelo propuesto, se encontró que, para los datos considerados, éste resultó tener errores relativos más pequeños que el de Martínez. Por otra parte, en ninguno de los resultados el modelo presentó un error mayor que el 10%. Así, este modelo podía considerarse adecuado; sin embargo, era necesario estudiar más la naturaleza del error cometido al utilizarlo. Un resumen de los resultados de los modelos probados, tanto para el caso del vertedor como del orificio, se presenta en el cuadro 3.

Contrastación del modelo propuesto

Para conocer con mayor profundidad el error que se comete con el modelo propuesto, es conveniente considerar un mayor número de juegos de datos.

– Vertedor

Martínez (1995) indica que contrastó su modelo con tránsitos de 156 avenidas, cuyos parámetros se eligieron aleatoriamente, y que utilizó el método de Runge-Kutta de 4o. orden. En este trabajo se utilizaron esos mismos datos, con el objeto de facilitar la comparación de sus resultados y los del modelo aquí propuesto. En el cuadro 4 se presenta un resumen comparativo de ambos métodos.

De la observación del cuadro 4 se puede apreciar que el modelo propuesto en este trabajo presenta menor error relativo que el propuesto por Martínez; se puede observar que el error relativo medio del modelo de Martínez es de 9.58%, mientras que el del propuesto aquí es -0.81%. Sólo el valor mínimo del error es un poco más favorable en el modelo anterior. También se encontró que si la estimación de la atenuación $O_{\max}/I_p$ era menor que 0.20 o mayor que 0.93, el error relativo mostraba una media de sus valores absolutos igual a 0.59%, una desviación estándar de 0.59% y un valor absoluto máximo de 2.78%. En general, se concluye que el modelo propuesto estima mucho mejor la atenuación.

Puesto que podría resultar muy útil poder predecir el error del modelo para cualquier conjunto de parámetros adimensionales (Martínez, 1995), era conveniente tratar de identificar relaciones funcionales de la forma:

$$e_r\% = f_1(K_g, K_v, N, T_i) \quad (30)$$

puesto que los parámetros K_g , K_v , N y T_i llevan a obtener O_p/I_p al aplicar el tránsito convencional; mientras que, utilizando el modelo propuesto, llevan a $O_{\max}/I_p$; de donde, para cada juego de parámetros, se puede calcular el error relativo observado (ecuación 20) correspondiente. Por simplicidad, la ecuación 30 podría ser lineal, ya fuera en los parámetros originales o en transformaciones de ellos, con el objeto de poder utilizar técnicas de regresión lineal múltiple (Spiegel, 1979), (Berenzon Levine, 1982), (Neave, 1989) y (Martínez, 1995). Se probaron varias opciones de regresión lineal múltiple. Después de varias propuestas se llegó a la ecuación lineal de la forma:

3. Errores relativos medios (%) del modelo de Martínez (1995) y del propuesto en este trabajo para estimar la atenuación de avenidas en embalses (10 juegos de datos)

Modelo	Vertedor (media del error relativo)	Vertedor (media del valor absoluto del error relativo)	Orificio (media del error relativo)	Orificio (media del valor absoluto del error relativo)
Martínez	4.1	5.4	77.8	77.8
propuesto	-1.2	2.3	4.3	4.3

4. Resumen de resultados del modelo de Martínez (1995) y el propuesto (156 tránsitos) (Caso vertedor)

	K_g	K_v	N	T_i	O_p/I_p	$O_{\max}/I_p$ Martínez	$e_r\%$ Martínez	$O_{\max}/I_p$ propuesto	$e_r\%$ propuesto
Media	156.90	3.7186	6.0603	2.63	0.45415	0.49182	9.58	0.44720	-0.81
Des. Est.	204.7	19.2076	3.1664	0.99	0.35117	0.37754	24.33	0.34390	2.30
Máx	858.74	231.1940	11.9705	4.5	0.96905	1.00000	135.69	0.97664	7.39
Mín.	0.18	0.008264	1.0478	1.0	0.00073	0.00073	-5.76	0.00073	-7.41

$$e_r^a\% = a + b \log K_g + c (K_g/K_v) + dN + eT_i \quad (31)$$

Se comenzó con los 156 juegos de datos. De análisis en análisis se reagrupaban los datos, considerando aquéllos que mostraron las menores diferencias entre el observado y el error estimado mediante la ecuación de ajuste, con el objeto de desechar, para el nuevo cálculo, los juegos de datos que se apartaban más de la tendencia general de la ecuación probada, tomando en cuenta varias pruebas estadísticas (Spiegel, 1979), (Berenson y Levine, 1982) y (Neave, 1989). De acuerdo con los análisis efectuados para los 55 juegos de datos considerados como definitivos, se concluyó que se puede adoptar la ecuación:

$$e_r^a\% = -3.898 - 1.095 \log K_g + 8.35 E^{-5} (K_g/K_v) + 0.3054N + 1.123 T_i \quad (32)$$

la cual podría utilizarse para corregir la estimación de la atenuación, $O_{\max}/I_p$, obtenida con el modelo propuesto, para tener una estimación aún mejor; o sea que, una vez obtenidos la estimación de la atenuación y el error relativo estimado con la ecuación de ajuste (32), se puede hacer:

$$\frac{O_p}{I_p} \approx \frac{O_{\max}}{I_p} \frac{O_p}{O_{\max}} = \frac{O_{\max}}{I_p} \frac{100}{e_r^a\% + 100} \quad (33)$$

donde, de la ecuación 20:

$$\frac{O_p}{O_{\max}} = \frac{100}{e_r^a\% + 100} \quad (34)$$

Se estudió el efecto de la aplicación de las ecuaciones 32 y 33 a los mismos 156 juegos de datos, pues se quería establecer las condiciones de cuándo es conveniente aplicar la corrección y cuándo el resultado inicial puede ser ya suficientemente bueno. Los resultados del análisis se indican adelante (Algoritmo del método propuesto).

– Orificio

A fin de generar los juegos de datos para la investigación del error, se propusieron combinaciones de parámetros formadas por los valores $N = 1.0, 3.75, 6.5, 9.25$ y 12.0 ; $T_i = 1.0, 2.75$ y 4.5 ; $O_{\max}/I_p = 0.05, 0.15, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.85, 0.95$; $h_{\max}/h_o = 1.25, 1.5, 2.0, 3.0, 5.0$ y 7.0 , con las cuales se calcularon: K_g , K_v , R_g , R_v y O_p/I_p . Los rangos de N y T_i se eligieron de forma que fueran prácticamente iguales a los correspondientes al caso del vertedor. Los valores de $O_{\max}/I_p$ abarcan el rango de mayor interés práctico. El rango de $h_{\max}/h_o$ se dedujo de los resultados de los diez juegos de datos para contrastar (cuadro 2). Los valores propuestos de los cuatro parámetros implican $5 \times 3 \times 9 \times 6 = 810$ combinaciones, de las que se esperaba que algunas no fueran físicamente admisibles; es decir, que no se pudiera realizar el tránsito (porque la capacidad del embalse fuera demasiado pequeña para la avenida considerada y la capacidad de la estructura de salida fuera demasiado grande por lo que la avenida saliera del embalse tal como ingresó). Se generó aleatoriamente, con distribución uniforme, una muestra de 100 combinaciones; 7 se repetían, por lo que se tuvieron que eliminar. Al correr el tránsito convencional de avenidas se encontró que eran admisibles 61 combinaciones. Puede estimarse así que alrededor de $61/93 \times 810 = 531$ combinaciones –de las 810– son factibles. Por lo tanto, se tuvo una muestra de un 11.5% del total de combinaciones físicamente admisibles. Un resumen de los juegos de datos finalmente utilizados para el análisis se consigna en el cuadro 5. Se incluyen los resultados del tránsito convencional.

Puesto que aquí también podría resultar muy útil poder predecir el error del modelo para cualquier conjunto de parámetros, era conveniente tratar de identificar relaciones funcionales entre el error y dichos parámetros. Aquí también se probaron varias opciones de regresión lineal múltiple. Se encontró que la relación $e_r\% = f_1(K_g, K_v, N, T_i)$ (ecuación 30) podía ser sustituida por una relación que mostró un ajuste similar, y que, además, era más sencilla:

5. Resumen de resultados del modelo propuesto (Caso orificio 61 tránsitos)

	$R_g = K_g$	R_v	N	T_i	O_p/I_p	K_v	$h_{m\acute{a}x}/h_o$	$O_{m\acute{a}x}/I_p$	$e_r\%$
Media	0.3676	0.77334	4.61	2.92	0.32626	1296.9	2.844	0.34508	3.87
Des. Est.	0.3254	1.19394	3.64	1.41	0.23239	5763.3	1.800	0.25003	2.62
Máx	1.5000	6.37500	12.00	4.50	0.91355	36776	7.000	0.95000	8.73
Mín.	0.0250	0.00049	1.00	1.00	0.04952	0.2941	1.250	0.05000	-0.40

$$e_r\% = f_2(T_i, O_{m\acute{a}x}/I_p) \quad (35)$$

Después de varias propuestas se llegó a la ecuación lineal de la forma

$$e_r\% = aT_i + b(O_{m\acute{a}x}/I_p) \quad (36)$$

se utilizaron los 61 juegos de datos con los que se consideró que se podrían establecer conclusiones generales; de tal forma, no fue necesario realizar ajustes posteriores, ya fuera tomando en cuenta ecuaciones más complejas o tomando un número menor de datos. Se concluyó que se puede adoptar la ecuación:

$$e_r\% = 0.3489 T_i + 8.9368 (O_{m\acute{a}x}/I_p) \quad (37)$$

la cual podría utilizarse –como en el caso del vertedor– para corregir el valor de la atenuación, $O_{m\acute{a}x}/I_p$, obtenido mediante el modelo propuesto, para tener una estimación aún mejor; o sea, que se puede volver a aplicar:

$$\frac{O_p}{I_p} \approx \frac{O_{m\acute{a}x}}{I_p} \frac{O_p}{O_{m\acute{a}x}} = \frac{O_{m\acute{a}x}}{I_p} \frac{100}{e_r\% + 100} \quad (33)$$

También aquí se estudió el efecto de la aplicación de las ecuaciones 37 y 33 a los mismos 61 juegos de datos, pues se querían establecer de nuevo las condiciones de cuándo es conveniente aplicar la corrección y cuándo el resultado inicial puede ser ya suficientemente bueno. Los resultados principales se consignan adelante (Algoritmo del método propuesto).

Consideraciones teóricas complementarias

Forma del hidrograma de salida del modelo de Martínez

La simplificación que permitió establecer el modelo propuesto (ecuación 21) a partir de la ecuación de continuidad y de los hidrogramas transformados de entrada y salida (ilustración 3), es aproximadamente válida para ambas estructuras. Sin embargo, se tiene un comportamiento del error diferente para cada una; para el

orificio, los resultados muestran errores relativos mayores que los que se obtienen para el vertedor, pues para el orificio la curva del hidrograma de salida se aleja más de la línea recta. De acuerdo con la solución de la ecuación lineal, para cualquier tiempo $0 \leq t \leq t_b$, la elevación del agua en el embalse se puede calcular:

$$h = buT[1 - e^{at}] + h(0)e^{at} \quad (12)$$

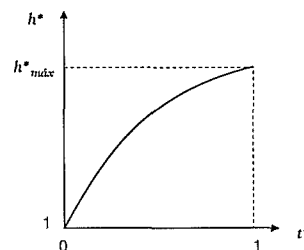
haciendo $h(0) = h_o$, y definiendo, para esta explicación, la elevación adimensional con $h^* = h/h_o$ y el tiempo adimensional con $t^* = t/t_b$; la ecuación anterior se puede escribir:

$$h^* = \frac{buT}{h_o} [1 - e^{at^*}] + e^{at^*} \quad (38)$$

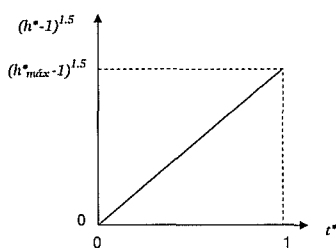
en esta ecuación $(buT)/h_o$ debe ser mayor que 1. De otra manera, h^* se haría menor que 1, lo que indicaría

4. Curvas asociadas a la simplificación teórica

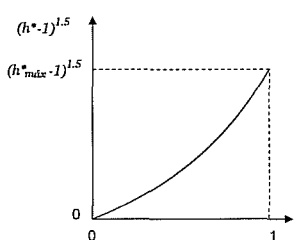
a. Curva con at_b grande



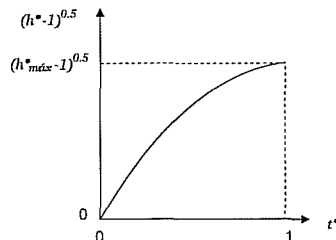
b. Curva con at_b pequeña



c. Hidrograma del vertedor (curva proporcional)



d. Hidrograma del orificio (curva proporcional)



una elevación por debajo de h_0 . Si at_b no es pequeño, la curva que representa la ecuación 38 toma una forma exponencial (ilustración 4a). Si, por el contrario, at_b es pequeño, la ecuación toma la forma de una línea recta (ilustración 4b); o sea, si $at_b \rightarrow 0$ entonces $e^{at_b} \rightarrow 1 + at_b$ y la ecuación 38 se podrá escribir:

$$h^* = \left[1 - \frac{buT}{h_0} \right] at_b t^* + 1 \quad (38')$$

Para ambas estructuras de salida, el gasto es:

$$O = C_s (h - h_0)^{N_s} \quad (5)$$

entonces, el gasto adimensional de salida, $O^* = O/O_{\text{máx}}$, será:

$$O^* = \frac{C_s (h - h_0)^{N_s}}{C_s (h_{\text{máx}} - h_0)^{N_s}} = \frac{h_0^{N_s} (h^* - 1)^{N_s}}{h_0^{N_s} (h_{\text{máx}}^* - 1)^{N_s}} = \frac{(h^* - 1)^{N_s}}{(h_{\text{máx}}^* - 1)^{N_s}} \quad (39)$$

por lo que, hasta $t^* = 1$, el volumen total de salida, adimensional, $v^* = v/v_{\text{máx}}$, será:

$$v^* = \int_0^1 \frac{(h^* - 1)^{N_s}}{(h_{\text{máx}}^* - 1)^{N_s}} dt^* = \frac{\int_0^1 (h^* - 1)^{N_s} dt^*}{(h_{\text{máx}}^* - 1)^{N_s}} \quad (40)$$

Si at_b es pequeño, $h^* - 1$ es proporcional a t^* , o sea, $(h^* - 1) = (h_{\text{máx}}^* - 1) t^*$; con lo que la ecuación 40 se puede escribir:

$$v^* = \frac{\int_0^1 (h_{\text{máx}}^* - 1)^{N_s} (t^*)^{N_s} dt^*}{(h_{\text{máx}}^* - 1)^{N_s}} = \frac{(h_{\text{máx}}^* - 1)^{N_s} \int_0^1 (t^*)^{N_s} dt^*}{(h_{\text{máx}}^* - 1)^{N_s}} =$$

$$v^* = \int_0^1 (t^*)^{N_s} dt^* = \left[\frac{(t^*)^{N_s+1}}{N_s+1} \right]_0^1 = \frac{1}{N_s+1} \quad (41)$$

o sea:

$$v^* = \frac{\int_0^1 (h^* - 1)^{N_s} dt^*}{(h_{\text{máx}}^* - 1)^{N_s}} = \frac{1}{N_s+1} \quad (42)$$

Si la estructura de salida es un vertedor, $N_s = 1.5$, la curva de $(h^* - 1)^{N_s}$ contra t^* será como la representada en la ilustración 4c y el valor de v^* será 4/10. Puesto que en la formulación del método la relación calculada con la ecuación 42 se supuso igual a 1/2 (ecuación

21); el método propuesto tenderá, en el caso del vertedor, a mostrar valores de la atenuación menores que los obtenidos con el tránsito convencional. Si la estructura de salida es un orificio, el gasto será proporcional a $(h^* - 1)^{0.5}$; se tendrá un hidrograma con el aspecto de la curva ilustrada en la ilustración 4d y el valor de v^* será 2/3. También para el orificio esta relación se supuso igual a 1/2; por lo tanto, el método propuesto tenderá, en este caso, a mostrar valores de la atenuación mayores que el tránsito convencional. Puesto que se quería plantear un método lo más sencillo posible, se evitó la introducción de otro parámetro que tomara los valores 4/10 o 2/3, o inclusive cualquier valor intermedio. Por ello se utilizó para ambos casos un solo valor igual a 1/2 mismo que dio resultados satisfactorios (cuadros 4 y 5). Nótese, por otra parte, que v^* representa la relación entre el área ubicada bajo la curva del hidrograma de salida, hasta el tiempo base, y el área del rectángulo definido por el gasto máximo de salida y el mismo tiempo base.

Aplicación del método a avenidas con forma diferente a la triangular

De acuerdo a Martínez (1995), las avenidas de las formas que usualmente se presentan en la naturaleza, pueden transformarse a formas triangulares que produzcan las mismas atenuaciones que las avenidas originales. Esta conclusión puede extenderse a aquellas avenidas propuestas por diversos autores, para diseño o análisis de obras de excedencias o control (Horn, 1987, y Basha, 1994). Con lo que el método propuesto en este trabajo, también se puede aplicar a cualquier avenida usual, generalmente de un solo pico. Para la transformación se pueden seguir los criterios incluidos adelante.

Resultados finales

Algoritmo del método propuesto

A pesar de que una ecuación puede resolverse mediante varios métodos (Fenves, 1976, Kreyszig, 1981), uno que converge rápidamente y que puede ser aplicado en el cálculo de la estimación de la atenuación es el de Newton-Raphson (la ecuación involucrada se puede derivar, se tiene un valor cercano a la raíz y se cumplen las condiciones de convergencia). El siguiente es un esquema basado en dicho método:

Paso 1) Se tiene al embalse a punto de derramar, o sea $h = h_0$ así como las características del embalse y de la estructura de salida.

Paso 2) A partir de la avenida original, se obtienen u , t_b , t_p y T_i . Este es el paso más delicado del método, especialmente si se quiere aplicar a tránsitos de avenidas de forma sensiblemente distinta de la triangular, pues una mala estimación del valor de los parámetros conducirá a un resultado pobre. Una vez que se haya dibujado el hidrograma, se pueden tomar en cuenta las siguientes reglas generales (Martínez, 1995):

2.1) Si una de las ramas del hidrograma original se parece mucho a una línea recta y bajo ella se puede formar aproximadamente un triángulo, entonces:

$$u_i = \frac{\int_{T_{ii}}^{T_{fi}} I dt}{T_{fi} - T_{ii}} \quad (43)$$

$$t_{bi} = T_{fi} - T_{ii} \quad (44)$$

donde:

u_i : gasto medio de la rama considerada, m^3/s .

t_{bi} : tiempo base de la rama transformada, s.

T_{fi} : tiempo final de la rama original, s.

T_{ii} : tiempo inicial de la rama original, s.

I : gasto original de entrada, m^3/s .

2.2) Si una de las ramas del hidrograma original está demasiado extendida, o sea, si es asintótica al eje del tiempo, se hace:

$$u_i = \frac{I_{pi}}{2} \quad (45)$$

$$T_{bi} = \frac{2 \int_{I_{pi}}^{T_{ii}} I dt}{I_{pi}} \quad (46)$$

donde:

I_{pi} : gasto máximo de la rama considerada, m^3/s .

2.3) Si en el hidrograma original aparece una meseta demasiado prolongada, tendrá que tomarse en cuenta, complementariamente a los criterios dados en los dos incisos anteriores. Su altura media representará a u_i y su duración representará a t_{bi} .

2.4) Finalmente, los parámetros del hidrograma se calcularán, con base en los de cada una de las n_h partes en las que se haya dividido, con:

$$t_b = t_{b1} + t_{b2} + \dots + t_{bnh} \quad (47)$$

$$u = \frac{u_1 t_{b1} + u_2 t_{b2} + u_3 t_{b3} + \dots + u_{nh} t_{bnh}}{t_b} \quad (48)$$

$$T_i = \frac{t_b - t_p}{t_p} \quad (10)$$

donde:

t_b : tiempo base del hidrograma transformado, s.

u : gasto medio del hidrograma transformado, m^3/s .

t_p : tiempo de pico del hidrograma transformado, s.

t_i : tiempo adimensional de recesión del hidrograma transformado.

Nótese que tanto las integrales que aparecen en las ecuaciones anteriores, como los parámetros del hidrograma, se pueden medir o estimar directamente sobre el dibujo del hidrograma o calcular con algún método numérico; o sea que si el hidrograma de entrada se da en forma tabular, se pueden calcular con alguna expresión como la regla de los trapecios (Fenves, 1976):

$$\int_0^I I dt = \sum_{i=1}^{n_i} \bar{I}_i \Delta t_i \quad (49)$$

que supone un gasto de entrada promedio para cada uno de los n_i intervalos de discretización del hidrograma tabular.

Paso 3) Se calculan los parámetros K_v y K_g de acuerdo con el tipo de estructura de salida:

$$K_g = \frac{C_s h_0^{N_s}}{2u} \quad (25)$$

$$K_v = \frac{u t_b}{K h_0^N} \quad (26)$$

donde –se recordará que– para el vertedor $C_s = CL$ y $N_s = 1.5$; y para el orificio u orificios $C_s = n C_d A_o (2g)^{N_s}$, $N_s = 0.5$ y n es el número de orificios.

Paso 4) Se calcula el valor inicial de la elevación adimensional máxima (abreviadamente): $h^* = h_{máx}/h_0$. Se puede suponer que es el promedio de las elevaciones correspondientes a la atenuación nula y a la atenuación total, o sea:

$$h_1^* = 1 + \frac{1}{2K_g^{1/N_s}} \quad (50)$$

Paso 5) Con la ecuación de recurrencia (corazón del método de Newton-Raphson), se calcula una mejor aproximación de la elevación:

$$h_{i+1}^* = h_i^* - \frac{f(h_i^*)}{f'(h_i^*)} \quad (51a)$$

donde las funciones $f(h_i^*)$ y $f'(h_i^*)$ se obtienen de la re-escritura y derivación de la ecuación 27:

$$f(h_i^*) = K_v - K_v K_g (h_i^* - 1)^{N_s} - (h_i^*)^N + 1 \quad (51b)$$

$$f'(h_i^*) = N_s K_v K_g (h_i^* - 1)^{N_s-1} - N(h_i^*)^{N-1} \quad (51c)$$

Si: $|h_{i+1}^* - h_i^*|$ es mayor que una tolerancia previamente fijada, se deberá entonces hacer $i = i + 1$ y regresar al inicio del paso cinco. Si no: hacer $h^* = h_{i+1}^*$ y continuar con el siguiente paso.

Paso 6) Calcular la estimación de la atenuación $O_{\max}/I_p$, con:

$$\frac{O_{\max}}{I_p} = \frac{O_{\max}}{2u} = K_g (h^* - 1)^{N_s} \quad (23')$$

Paso 7) Dependiendo del valor de $O_{\max}/I_p$ y del tipo de estructura, corregir la atenuación:

7.1) Para vertedor:

7.1.a) Si $O_{\max}/I_p < 0.20$ o $O_{\max}/I_p > 0.93$ no efectuar corrección; pues el error es pequeño.

7.1.b) Si $0.20 \leq O_{\max}/I_p \leq 0.93$, utilizar:

$$e_r\% = -3.898 - 1.095 \log K_g + 8.35 E^{-5} (K_g/K_v) + 0.3054N + 1.123 T_i \quad (32)$$

válida para los rangos del cuadro 6.

El error relativo se obtiene con la ecuación 32 y se sustituye en la ecuación 33, para obtener una mejor estimación de la atenuación:

$$\frac{O_p}{I_p} \approx \frac{O_{\max}}{I_p} \frac{O_p}{O_{\max}} = \frac{O_{\max}}{I_p} \frac{100}{e_r\%} = 100 \quad (33)$$

6. Rangos de validez de los parámetros de la ecuación 32

	K_g	K_v	N	T_i
Máximo	858.74	231.194	11.9705	4.5
Mínimo	0.18	0.008264	1.0478	1.0

De acuerdo con el criterio adoptado en ambos casos, 7.1.a y 7.1.b, el error medio general -obtenido con 156 tránsitos con muy diversos parámetros e hidrogramas de entrada triangulares- es del orden de 1% (1.03%) y su desviación estándar es aproximadamente de 1.5% (1.43%); y, en ningún caso, el valor absoluto del error es mayor del 5%.

7.2) Para orificio:

7.2.a) Si $O_{\max}/I_p \leq 0.05$ o $O_{\max}/I_p \geq 0.95$ no efectuar corrección, pues el error es pequeño.

7.2.b) Si $0.05 < O_{\max}/I_p < 0.95$, utilizar:

$$e_r\% = 0.3489 T_i + 8.9368 (O_{\max}/I_p) \quad (37)$$

válida para los rangos del cuadro 7.

7. Rangos de validez de los parámetros de la ecuación 37

	T_i	$O_{\max}/I_p$
Máximo	4.5	0.95
Mínimo	1.0	0.05

El error relativo se obtiene con la ecuación 37 y, como en el caso de vertedor, se sustituye en la ecuación 33 para mejorar la estimación de la atenuación. De acuerdo con el criterio adoptado en ambos casos, 7.2.a y 7.2.b, el error medio general -obtenido con 61 tránsitos con muy diversos parámetros e hidrogramas de entrada triangulares- es del orden de 0.8% (0.81%) y su desviación estándar es aproximadamente de 1.0% (1.03%). En ningún caso, el valor absoluto del error es mayor del 4%.

Ejemplo 1. (Caso Vertedor)

Estimar la atenuación de la avenida del cuadro 8 (Sánchez, 1978). si pasa por un embalse cuyas características son las siguientes:

8. Avenida del ejemplo 1

i	t (hr)	I (m³/s)	i	t (hr)	I (m³/s)
1	0.0	0	7	3.0	230
2	0.5	100	8	3.5	140
3	1.0	400	9	4.0	80
4	1.5	500	10	4.5	30
5	2.0	460	11	5.0	0
6	2.5	350			

- a) Parámetros de la curva elevaciones-capacidades:
 $K = 1.4$ y $N = 4.5$.
 b) Obra de excedencias: vertedor con $C = 2 \text{ m}^{0.5}/\text{s}$,
 $L = 15 \text{ m}$ y $h_0 = 30 \text{ m}$.
 c) Condición inicial $h_1 = 30 \text{ m}$.
 d) Tolerancia en el cálculo de h^* : $\text{tol} = 0.0001$.

Solución

Paso 1) El embalse está a punto de derramar:

$$h_1 = h_0 = 30 \text{ m}.$$

Paso 2) Obtención de los parámetros que definen a la avenida. De la ilustración 5 se ve que el hidrograma es aproximadamente triangular, por lo que, del cuadro 8:

$$u = \frac{(100+400+500+460+350+230+140+80+30) \cdot 180}{10 \cdot 1800} =$$

$$u = 229.0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$t_b = 5.0 \text{ hr} \times 3600 \text{ s/hr} = 18,000 \text{ s}$$

$$t_p = 1.5 \times 3600 = 5,400 \text{ s}$$

$$T_t = (18,000 - 5,400) / 5,400 = 2.3333$$

Paso 3) Cálculo de los parámetros K_v y K_g :

$$K_g = \frac{C_s h_0^{N_s}}{2u} = 2 \times 15 \times 30^{1.5} / 229 = 10.7631$$

$$K_v = \frac{u t_b}{K h_0^N} = 229 \times 18,000 / 1.4 / 30^{4.5} = 0.6636$$

Paso 4) Cálculo del valor inicial de la elevación adimensional:

$$h_1^* = 1 + \frac{1}{2K_g^{1/N_s}} = 1 + 1/2/10.7631^{(1/1.5)} = 1.1026$$

Paso 5) Con las ecuaciones 51 se calcula un mejor valor de h_{i+1}^* :

$$f(h_1^*) = K_v - K_v K_g (h_1^* - 1)^{N_s} - (h_1^*)^N + 1 =$$

$$f(h_1^*) = 0.6636 - 0.6636 \times 10.7631 \times (1.1026 - 1)^{1.5}$$

$$- 1.1026^{4.5} + 1 = -0.1227$$

$$f'(h_1^*) = N_s K_v K_g (h_1^* - 1)^{N_s-1} - N(h_1^*)^{N-1} =$$

$$f'(h_1^*) = -1.5 \times 0.6636 \times 10.7631 \times (1.1026 - 1)^{0.5}$$

$$- 4.5 \times 1.1026^{3.5} = -9.7647$$

$$h_{i+1}^* = h_1^* - \frac{f(h_1^*)}{f'(h_1^*)} = 1.1026 - (0.1227)/(-9.7647) = 1.0900$$

como $|h_{i+1}^* - h_1^*| = 0.0126 > \text{tol} = 0.0001$, se debe calcular un nuevo valor de h^* .

Repitiendo el paso cinco, se obtienen los resultados del cuadro 9.

9. Interacciones del ejemplo 1

i	h^*	$f(h^*)$	$f'(h^*)$
1	1.1026	-0.1227	-9.7647
2	1.0900	-0.0029	-9.2984
3	1.0897	-0.0000	-9.2866
4	1.0897	---	---

por tanto: $h^* = 1.0897$

Paso 6) Se calcula la estimación de la atenuación:

$$\frac{O_{\text{máx}}}{I_p} = K_g (h^* - 1)^{N_s} = 10.7631 \times (1.0897 - 1)^{1.5} = 0.2891$$

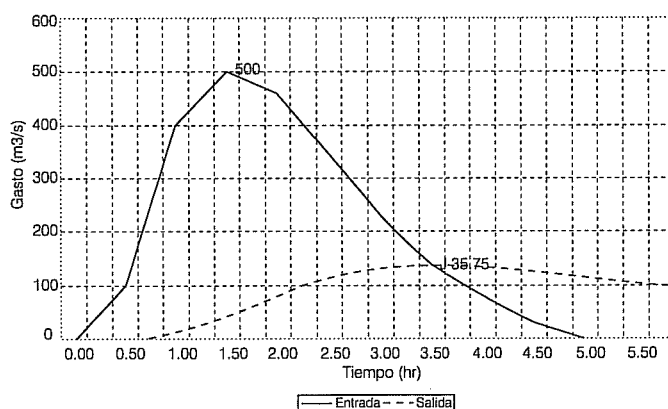
Paso 7) Corrección. Como la estructura es un vertedor y la estimación de la atenuación está entre 0.20 y 0.93, debe procederse a efectuar la corrección, aplicando las ecuaciones 32 y 33:

$$e_r\% = -3.898 - 1.095 \log K_g + 8.35 E^{-5} (K_g/K_v) + 0.3054 N + 1.123 T_t =$$

$$e_r\% = -3.898 - 1.095 \times \log (10.731) + 8.35 \times 10^{-5} \times 10.7631/0.6636 + 0.3054 \times 4.5 + 1.123 \times 2.333 =$$

$$e_r\% = 1.032\%$$

5. Ejemplo 1. Hidrogramas de entrada y salida



Por tanto, la atenuación del método convencional será aproximadamente:

$$\frac{O_p}{I_p} \approx \frac{O_{\max}}{I_p} \frac{100}{e_r\% = 100} = 0.2891 \times 100 / (-1.032 + 100) = 0.2921$$

Como generalmente se desea saber O_p con el valor anterior, y recordando que para el hidrograma triangular se tiene que $I_p = 2u$, entonces:

$$O_p \approx \left(\frac{O_p}{I_p} \right) I_p = \left(\frac{O_p}{I_p} \right) 2u = 0.2921 \times 2 \times 229 = 133.78 \text{ m}^3/\text{s}$$

Si se quiere saber en qué tiempo se presenta el gasto máximo de salida (O_p), sólo es necesario identificar el tiempo para el cual en la rama descendente del hidrograma de entrada se presenta un gasto igual a O_p . Esto se puede explicar a partir de la ecuación de continuidad ($dV/dt = I - O$, ecuación 1). El volumen almacenado máximo en el embalse se presenta cuando $dV/dt = 0$ (véase la ilustración 1), lo que lleva a observar que en un cierto tiempo $t = t_{po}$ se cumple que $I = O$; además, como O depende de la elevación del agua en el embalse se concluye que O para t_{po} es igual a O_p , además como antes de t_{po} siempre $I > O$ también se concluye que se debe presentar O_p después del tiempo de pico (t_p) del hidrograma de entrada (Horn, 1987), (Martínez, 1995).

En la ilustración 5 se grafica la solución obtenida mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con $\Delta t = 900$ s, en ella se observa que $O_p = 135.75 \text{ m}^3/\text{s}$. Para este ejemplo particular el error relativo final, con respecto al hidrograma original, es -1.45%.

Ejemplo 2. (Caso Orificio)

Estimar la atenuación de la avenida del cuadro 10, si pasa por un tanque de detención cuyas características son las siguientes:

10. Avenida del ejemplo 2

i	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	i	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	i	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)
1	0.000	0.000	10	1.950	1.134	19	0.430	1.069
2	0.030	0.013	11	1.821	1.209	20	0.336	0.992
3	0.216	0.121	12	1.641	1.258	21	0.259	0.908
4	0.576	0.258	13	1.437	1.283	22	0.199	0.818
5	1.017	0.422	14	1.227	1.288	23	0.151	0.724
6	1.434	0.595	15	0.027	1.273	24	0.114	0.625
7	1.753	0.760	16	0.844	1.241	25	0.085	0.524
8	1.941	0.908	17	0.683	1.196	26	0.064	0.421
9	2.000	1.034	18	0.545	1.138	27	0.047	0.317

- Parámetros de la curva elevaciones-capacidades: $K = 760$ y $N = 1.0$.
- Obra de excedencias: orificio con $C_d = 0.6$, $A_0 = 0.342 \text{ m}^2/\text{s}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ y $h_0 = 1.0 \text{ m}$.
- Condición inicial $h_1 = 1.0 \text{ m}$.
- Tolerancia en el cálculo de h^* : $\text{tol} = 0.0001$.

Solución:

Paso 1) El tanque está a punto de derramar: $h_1 = h_0 = 1.0 \text{ m}$.

Paso 2) Obtención de los parámetros que definen la avenida. Del cuadro 6 se observa que el hidrograma tiene su rama ascendente siguiendo a la regla 2.1 y su rama descendente a la regla 2.2. Aplicándolas se llega a:

$$\begin{aligned} u &= 1.0 \text{ m}^3/\text{s} \\ t_b &= 4,914 \text{ s} \\ t_p &= 1,800 \text{ s} \\ T_r &= (4,914 - 1,800) / 1,800 = 1.73 \end{aligned}$$

Paso 3) Cálculo de los parámetros K_v y K_g :

$$K_g = \frac{C_s h_0^{Ns}}{2u} 0.6 \times 0.342 \times (2 \times 9.81)^{0.5} \times 1.0^{0.5} / 2 / 1.0 = 0.4545$$

$$K_v = \frac{u t_b}{K h_0^N} 1.0 \times 4914 / 760 / 1.0^{1.0} = 6.4658$$

Paso 4) Cálculo del valor inicial de la elevación adimensional:

$$h_1^* = 1 + \frac{1}{2K_g^{1/Ns}} = 1 + 1/2/0.4545^{(1/0.5)} = 3.4209$$

Paso 5) Con las ecuaciones 51 se calcula un mejor valor de h_{i+1}^* :

$$f(h_1^*) = K_v - K_v K_g (h_1^* - 1)^{Ns} - (h_1^*)^N + 1 =$$

$$f(h_1^*) = 6.4658 - 6.4658 \times 0.4545 \times (3.4209 - 1)^{0.5}$$

$$- 3.4209^{1.0} + 1 = -0.5271$$

$$f(h_1^*) = N_s K_v K_g (h_1^* - 1)^{Ns-1} - N(h_1^*)^{N-1} =$$

$$f(h_1^*) = -0.5 \times 6.4658 \times 0.4545 \times (3.4209 - 1)^{0.5}$$

$$- 1.0 \times 3.4209^{0.0} = -1.9443$$

$$h_{i+1}^* = h_1^* - \frac{f(h_1^*)}{f'(h_1^*)} = 3.4209 - (0.5271) / (-1.9443) = 3.1498$$

como $|h_{i+1}^* - h_i^*| = 0.2711 > \text{tol} = 0.0001$, se debe calcular un nuevo valor de h^* .

Repetiendo el paso cinco, se obtienen los resultados del cuadro 11.

11. Interacciones del ejemplo 2

I	h^*	$f(h^*)$	$f(h^*)$
1	3.4209	-0.5271	-1.9443
2	3.1498	+0.0076	-2.0021
3	3.1536	+0.0000	-2.0012
4	3.1536	---	---

por tanto: $h^* = 3.1536$

Paso 6) Se calcula la estimación de la atenuación:

$$\frac{O_{\max}}{I_p} = R_g(h^* - 1)^{N_s} = 0.4545 \times (3.1536 - 1)^{0.5} = 0.6669$$

Paso 7) Corrección. Como la estructura es un orificio y la estimación de la atenuación está entre 0.05 y 0.95, se debe proceder a efectuar la corrección, aplicando las ecuaciones 37 y 33:

$$e_r^a\% = -0.3489 T_i + 8.9368 (O_{\max}/I_p) = 0.3489 \times 1.73 + 8.9368 \times 0.6669 =$$

$$e_r^a\% = 6.564\%$$

$$\frac{O_p}{I_p} \approx \frac{O_{\max}}{I_p} \frac{100}{e_r^a\% + 100} = 0.6669 \times 100 / (6.564 + 100) = 0.6258$$

Como generalmente se desea saber O_p , entonces:

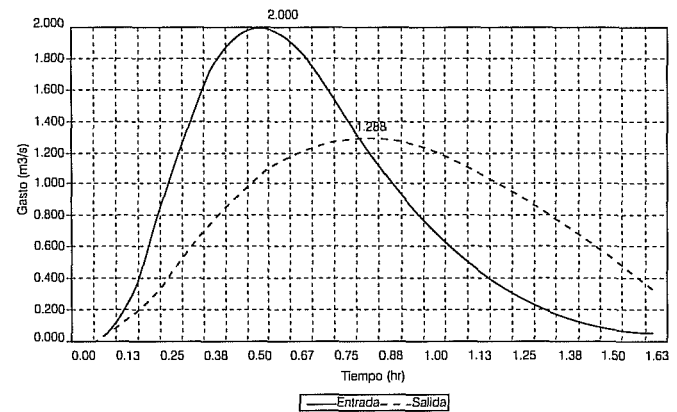
$$O_p \approx \left(\frac{O_p}{I_p} \right) I_p = \left(\frac{O_p}{I_p} \right) 2u = 0.6258 \times 2 \times 1.0 = 1.252 \text{ m}^3/\text{s}$$

En la ilustración 6 se grafica la solución obtenida mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con $\Delta t = 225$ s. En ella se observa que $O_p = 1.288 \text{ m}^3/\text{s}$. Para este ejemplo, el error relativo final con respecto al hidrograma original es -2.80%. Horn (1987) da para estos datos un $O_p = 1.3 \text{ m}^3/\text{s}$.

Conclusiones

1.- A partir del modelo propuesto por Martínez (1995) se logró formular, con una simplificación complementaria, un nuevo modelo. La simplificación consiste en aplicar la ecuación de continuidad a los hidrogramas

6. Ejemplo 2. Hidrogramas de entrada y salida



transformados, el de entrada, un rectángulo y el de salida, un triángulo. Se obtuvo una ecuación algebraica válida para vertedor y orificio. Con ello se logró: a) la extensión a los dos casos; b) una base física más fuerte, pues se procura el cumplimiento directo de la ley de la conservación de la masa, y c) una mayor sencillez de la solución numérica. Sin embargo, el nuevo método tampoco da la atenuación de una manera explícita, pues se tiene que recurrir a un esquema de aproximaciones sucesivas.

2.- Como en Martínez (1995) el hidrograma de entrada rectangular puede, a su vez, representar un hidrograma triangular; primero, se calcula la atenuación con el hidrograma rectangular y, segundo, se corrige ésta a partir de los valores de varios parámetros adicionales, uno de los cuales es el tiempo adimensional de recesión (T_i).

3.- El método propuesto es adecuado para los casos prácticos; puede aplicarse en vez del tránsito convencional de avenidas para acelerar el diseño o revisión de obras de excedencias y/o de control de avenidas, evitándose así tránsitos detallados sobre datos preliminares, y dejando el tránsito convencional para los resultados definitivos. Los errores relativos cometidos en la estimación de la atenuación de avenidas de forma triangular dependen del tipo de estructura de salida. Si se trata del vertedor, el error relativo medio general –obtenido con 156 tránsitos con muy diversos parámetros– es del orden del 1% (1.03%) y su desviación estándar es aproximadamente del 1.5% (1.43%). En ningún caso, el valor absoluto del error es mayor del 5%. Si es el orificio, el error relativo medio general –obtenido con 61 tránsitos con muy diversos parámetros– es del orden del 0.8% (0.81%), y su desviación estándar es aproximadamente de 1.0% (1.03%). En ningún caso, el valor absoluto del error es mayor del 4%.

4.- Cuando se aplique el método propuesto a la atenuación de avenidas de forma no triangular, se sujetará a las mismas reglas del método de Martínez (1995) y, por tanto, a las mismas limitaciones. Salvo en la estimación de la forma del hidrograma, hecha con el objeto de transformarla en una triangular, todo el método es numérico, susceptible de utilizarse a mano o en calculadora programable.

5.- Como resultados colaterales de importancia teórica y práctica, se puede mencionar: a) el hecho de haber extendido al caso del orificio la ecuación adimensional y los parámetros adimensionales del tránsito de avenidas, obtenidos por Martínez (1995), considerando que ambas estructuras de salida siguen la ecuación $O = C_s(h - h_0)^{n_s}$; b) que, desde el principio, el nuevo método se formuló adimensionalmente, definiéndose nuevos parámetros, y que, además, c) se dio una interpretación teórica del comportamiento del nuevo método para ambas estructuras de salida.

6.- Aunque el método se ha formulado para embalses a punto de derramar, que es la suposición más común, pudiera ser aplicado en condiciones diferentes, tanto con el agua por debajo como por arriba del nivel de salida; sin embargo, la dificultad agregada muy probablemente forzaría al proyectista a utilizar el tránsito convencional. Las ideas del método propuesto pueden ser aplicadas a embalses en los que la curva de elevaciones-capacidades, sea representada no por la ecuación $V = KhN$, sino por otra ecuación, un gráfico o un cuadro. También, al ser muy satisfactoria la solución numérica propuesta y muy sencilla su manipulación, no resultó muy atractiva la formulación de algún método gráfico o semigráfico, por lo que se desechó su obtención.

Agradecimientos

El autor agradece las recomendaciones y notas de los revisores técnicos, las cuales llevaron al enriquecimiento del presente artículo. También da las gracias a la Universidad Autónoma de Aguascalientes por la autorización del proyecto de investigación PII 96-4 *Atenuación de Avenidas en Embalses*, sin su apoyo, no hubiera podido realizar este trabajo.

Recibido: 08/10/97
Aprobado: 27/04/98

Referencias

Akan, A. O. 1989. Detention pond sizing for multiple return periods. *J. Hydraulic Engineering*, ASCE 115(5):650-666.
Akan, A. O. 1990. Single-outlet detention-pond analysis and design. *J. Hydraulic Engineering*, ASCE 116(4): 527-536.

Akan, A. O. y E. N. Antoun. 1994. Runoff detention for flood volume or erosion control. *J. Irrigation and Drainage Engineering*, ASCE. 120(1):168-178.
Aparicio M., F. J. 1992. *Fundamentos de hidrología de superficie*. Capítulo 5: Almacenamiento y tránsito en vasos y cauces, pág. 69-111. México, D.F.: Noriega-Limusa.
Auslander, D. M., Y. Takahasi y M. J. Rabins. 1976. *Introducción a sistemas y control*. Capítulo 5: Solución analítica de la ecuación de estado lineal, págs. 97-125, México, D.F.: McGraw Hill.
Basha, H. A. 1994. Nonlinear reservoir routing: particular analytical solution. *J. Hydraulic Engineering*, ASCE 120(5):624-632.
Basha, H. A. 1995. Routing equations for detention reservoirs. *J. Hydraulic Engineering*, ASCE 121(12):885-888.
Berenson, M. L., y D. M. Levine. 1982. *Estadística para administración y economía. Conceptos y aplicaciones*, Capítulo 15: análisis de regresión múltiple, págs. 508-553, México, D.F.: Interamericana.
Campos A., D. F. 1987. *Modelo precipitación-escurrimiento de eventos*. Capítulo 4: Métodos de tránsito de avenidas en cauces y embalses, Tesis Doctoral, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
Chow, V. T., D. R. Maidment y L. W. Mays. 1994. *Hidrología aplicada*. Capítulo 8: Tránsito agregado de crecientes, págs. 249-280. Santa Fé de Bogotá, D.C.: McGraw-Hill.
Fenves, S. J. 1976. *Métodos de computación en ingeniería civil*. Capítulo 3, tema 4: Integración numérica, págs. 62-70, y Capítulo 5: Aproximaciones sucesivas, págs. 125-146, México, D.F.: Limusa.
Hager, W. H., y R. Sinniger. 1985. Flood storage in reservoirs. *J. Irrigation and Drainage Engineering* 111(1):76-85.
Horn, D. R. 1987. Graphic estimation of peak flow reduction in reservoirs. *J. Hydraulic Engineering*, ASCE 113(11): 1441-1450.
Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE). 1980. *Manual de diseño de obras civiles*. Sección A: Hidrotecnia, tema 1: Hidrología. Capítulo 8: Tránsito de avenidas en vasos. México, D.F.: Comisión Federal de Electricidad (CFE).
Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE). 1983. *Manual de diseño de obras civiles*. Sección A: Hidrotecnia, tema 2: Hidráulica, Capítulo 16: Métodos Numéricos, tema 3: tránsito de avenidas en vasos, págs. 2.16.3.1 - 2.16.3.34. México, D.F.: Comisión Federal de Electricidad (CFE).
Kessler A., y M. H. Diskin. 1991. The efficiency function of detention reservoirs in urban drainage systems. *Water Resources Research* 27(3):253-258.
Kohler, M. A. 1958. Mechanical analogs aid graphical flood routing. *J. Hydraulics*, ASCE. 84(2):1585-1 - 1585-14.
Kreyszig, E. 1981. *Matemáticas avanzadas para ingeniería Vol II*. Capítulo 18: Análisis numérico, págs. 831-903. México, D.F.: LIMUSA.

- Martínez M., S. I. 1995. Estimación preliminar del gasto máximo regularizado al pasar una onda de avenida por un embalse. *Revista Investigación y Ciencia, Universidad Autónoma de Aguascalientes* 5(14):44-57.
- McEnroe, B. M. 1993. Preliminary sizing of detention reservoirs to reduce peak discharges. *J. Hydraulic Engineering*, ASCE 118(11):1540-1549.
- Neave, H. R. 1989. *Elementary statistics tables*, London: Unwin Hyman.
- Overton, D. E. 1966. Muskingum flood routing of upland streamflow. *J. Hydrology* 4(3).
- Sánchez B., J. L. 1978. *Doce algoritmos para resolver problemas de hidráulica*. Capítulo 1: Algoritmo 1. Tránsito de una avenida por un vaso, págs. 11-13 y 145-147, México, D.F.: Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Sarginson, E. J. 1973. Flood control in reservoirs and storage pounds. *J. Hydrology* 19(4):351-359.
- Sotelo A., G. 1980. *Hidráulica general*, Vol. 1. Fundamentos. Capítulo 6: Orificios y compuertas, págs. 203-239; Capítulo 7: Vertedores, págs. 241-276. México, D.F.: Limusa.
- Spiegel, M. R. 1979. *Estadística*. Capítulo 15: Correlación múltiple y parcial, págs. 269-282, Serie de compendios. México, D.F.: Schaum - McGraw Hill.
- United States Bureau of Reclamation (USBR). 1982. *Diseño de presas pequeñas*. Capítulo 8: Vertedores de demasías, págs. 280-373. México D.F.:CECSA.
- Viessman, W., J. W. Knapp y T. E. Harbaugh. 1977. *Introduction to hydrology*. Chapter 7: hydrologic and hydraulic routing, pp. 231-289. New York: Harper and Row Publishers.

Abstract

Martínez-Martínez, S.I. "Method to estimate peak flow reduction in reservoirs". *Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish)*. Vol. XIV. Num 1, pages 61-76, January-April, 1999.

An approximate method for estimate the attenuation that a flood wave suffers when passes by a reservoir with variable superficial area and spillway, weir or orifice outlet. The problem of hydrologic flood routing of a singled-peak flood is reduced to establishing and solving an algebraic equation and to applying a correction. The method is valid for many practical cases and leads results comparable with those of conventional flood routing.

Key words: flood, flood routing, hydrologic flood routing, reservoir, spillway, weir, orifice, approximate method.

Dirección Institucional de autores:

Sergio Ignacio Martínez Martínez

Universidad Autónoma de Aguascalientes
Centro de Ciencias del Diseño y de la Construcción
Av. Universidad Número 940, C.P. 20100
Aguascalientes, Aguascalientes
Teléfono: (49) 123345 extensión 434
Email: simartin@correo.uaa.mx