

# La solución cuasi-lineal de la infiltración vertical

Carlos Fuentes

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Jean-Yves Parlange

Departamento de Agricultura e Ingeniería Biológica, Estados Unidos

Randel Haverkamp

Michel Vauclin

Laboratorio de Estudio de las Transferencias en Hidrología y Medio Ambiente, Francia

*Se deduce la solución exacta de la ecuación de la infiltración unidimensional vertical cuando la difusividad hidráulica es considerada constante y la conductividad hidráulica es una combinación de una función lineal y una cuadrática del contenido volumétrico de agua. Esta solución cuasi-lineal de la infiltración contiene, como casos particulares, la solución clásica conocida como 62550 "suelo lineal", y la solución de Knight. La lámina infiltrada acumulada en función del tiempo proporcionada por la solución cuasi-lineal se ha comparado con la lámina infiltrada proporcionada por la solución numérica de la ecuación de Richards en tres suelos de propiedades hidrodinámicas contrastantes. El buen acuerdo entre las láminas infiltradas ha mostrado que la solución cuasi-lineal puede utilizarse en suelos donde la difusividad y la conductividad hidráulicas no satisfacen los supuestos de la deducción.*

**Palabras clave:** ecuación de Burgers, solución cuasi-lineal óptima.

## Introducción

La ecuación diferencial ampliamente utilizada para describir la infiltración vertical es de tipo Fokker-Planck no lineal, que resulta de la combinación de la ecuación de continuidad y de la ley de Darcy:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (1)$$

donde  $\theta$  es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo o contenido volumétrico de agua ( $\text{cm}^3/\text{cm}^3$ ), también llamado contenido de humedad, y es una función de la presión del agua en el suelo,  $\psi$ , expresada como una altura equivalente de columna de agua (cm);  $\theta(\psi)$  es conocida como curva característica de humedad o curva de retención de agua; el potencial gravitacional está asimilado a la coordenada vertical  $z$  orientada positivamente hacia abajo (cm);  $t$  es el tiempo (s);  $D(\theta) = K(\theta) d\psi/d\theta$  es la difusividad hidráulica ( $\text{cm}^2/\text{s}$ ), y  $K(\theta)$  es la conductividad hidráulica (cm/s).

La infiltración en una columna semi-infinita de suelo homogéneo bajo condiciones de concentración constante es descrita por la ecuación 1 sujeta a las condiciones:

$$\theta = \theta_1 \quad ; \quad z = 0 \quad ; \quad t > 0 \quad (2.1)$$

$$\theta = \theta_0 \quad ; \quad z \rightarrow \infty \quad ; \quad t > 0 \quad (2.2)$$

$$\theta = \theta_0 \quad ; \quad z \geq 0 \quad ; \quad t = 0 \quad (2.3)$$

donde  $\theta_1$  es el contenido volumétrico de agua impuesto sobre la superficie del suelo, tomado generalmente como igual al contenido volumétrico de agua a saturación ( $\theta_s$ );  $\theta_0$  es el contenido volumétrico de agua inicial tomado como constante.

El volumen infiltrado por unidad de superficie de suelo o lámina infiltrada  $I(t)$  (cm) en una columna semi-infinita sujeta a las condiciones precedentes se deduce del principio de conservación de masa:

$$I(t) - K_0 t = \int_0^\infty [\theta(z, t) - \theta_0] dz \quad (3.1)$$

$$I(t) = \int_0^t Q(\bar{t}) d\bar{t} \quad (3.2)$$

donde  $K_0 = K(\theta_0)$  es la conductividad hidráulica inicial;  $Q(t)$  es el flujo de Darcy en la superficie del suelo o velocidad de infiltración (cm/s).

La solución de la ecuación 1, sujeta a las condiciones de las ecuaciones 2, se establece cuando la difusividad es una constante [ $D(\theta) = \bar{D}$ ] y el coeficiente del término convectivo ( $dK/d\theta$ ) se considera constante o proporcional al contenido volumétrico de agua. Para satisfacer el comportamiento exacto de la lámina infiltrada en los tiempos muy cortos, la difusividad hidráulica constante se define como (Philip, 1969):

$$\bar{D} = \frac{\pi S^2}{4(\theta_1 - \theta_0)^2} \quad (4)$$

en donde  $S$  es la sorbilidad definida por:

$$S = \lim_{t \rightarrow 0} \left( I(t) / \sqrt{t} \right), [cm / \sqrt{s}]$$

Las soluciones pueden establecerse en forma adimensional, introduciendo las siguientes variables adimensionales:

$$\theta_* = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad (5.1)$$

$$D_*(\theta_*) = \frac{4(\theta_1 - \theta_0)^2}{\pi S^2} \bar{D} = 1 \quad (5.2)$$

$$K_*(\theta_*) = \frac{K(\theta) - K_0}{K_1 - K_0} \quad (5.3)$$

$$z_* = \frac{4(K_1 - K_0)(\theta_1 - \theta_0)}{\pi S^2} z \quad (5.4)$$

$$t_* = \frac{4(K_1 - K_0)^2}{\pi S^2} t \quad (5.5)$$

$$I_* = \frac{4(K_1 - K_0)}{\pi S^2} (I - K_0 t) = \int_0^\infty \theta_*(z_*, t_*) dz_* \quad (5.6)$$

donde  $K_1 = K(\theta_1)$  es la conductividad hidráulica en la superficie del suelo.

La ecuación 19, con difusividad constante y en escritura adimensional es la siguiente:

$$\frac{\partial \theta_*}{\partial t_*} = \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial z_*^2} - \frac{dK_*}{d\theta_*} \frac{\partial \theta_*}{\partial z_*} \quad (6)$$

sujeta a:

$$\theta_* = 1 \quad ; \quad z_* = 0 \quad ; \quad t_* > 0 \quad (7.1)$$

$$\theta_* = 0 \quad ; \quad z_* \rightarrow \infty \quad ; \quad t_* > 0 \quad (7.2)$$

$$\theta_* = 0 \quad ; \quad z_* \geq 0 \quad ; \quad t_* = 0 \quad (7.3)$$

Las dos soluciones clásicas del sistema (ecuaciones 6 y 7) corresponden a las dos funciones asumidas para la conductividad hidráulica. En la solución para el "suelo lineal" se asume (Philip, 1969):

$$K_*(\theta_*) = \theta_* \quad (8)$$

y en la solución de Knight (1973):

$$K_*(\theta_*) = \theta_*^2 \quad (9)$$

Las soluciones respectivas para la lámina infiltrada son:

$$I_* = t_* + \sqrt{\frac{t_*}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4}t_*\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{t_*}\right) - \frac{1}{2}t_* \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{t_*}\right) \quad (10)$$

$$I_* = t_* + \ln\left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{t_*}\right)\right] \quad (11)$$

donde  $\operatorname{erf}(x)$  es la función error y  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$  es la función error complementaria.

El objetivo del presente trabajo es encontrar la solución del sistema (ecuaciones 6 y 7), que contenga como casos particulares las soluciones del suelo lineal y del suelo de Knight.

## Teoría

La conductividad hidráulica se asume como la combinación lineal de las ecuaciones 8 y 9:

$$K_*(\theta_*) = \gamma \theta_* + \beta \theta_*^2$$

Dado que  $K_*(1) = 1$ , se deduce que  $\gamma = 1 - \beta$ , es decir:

$$K_*(\theta_*) = (1 - \beta) \theta_* + \beta \theta_*^2 \quad (12)$$

$$\frac{dK_*}{d\theta_*} = 1 - \beta + 2\beta \theta_* \quad (13)$$

Puesto que  $K'_*(\theta_*) = dK_*/d\theta_* \geq 0$  y  $K_*(\theta_*) \leq \theta_*$  para todo  $\theta_* \in [0,1]$ , se deduce de la primera condición  $K_*(0) = 1 - \beta \geq 0$ , y de la segunda  $\beta(1 - \theta_*) \geq 0$ . En consecuencia  $0 \leq \beta \leq 1$ .

La introducción de la ecuación 13 en la ecuación 6 permite obtener la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \theta_*}{\partial t_*} = \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial z_*^2} - (1 - \beta + 2\beta \theta_*) \frac{\partial \theta_*}{\partial z_*} \quad (14)$$

la cual se reduce a la ecuación clásica de Burgers (1948) cuando  $\beta = 1$ .

La ecuación generalizada de Burgers puede ser llevada a la forma de la ecuación lineal del calor, efectuando una transformación no lineal debida a Hopf (1950) y Cole (1951). Esta transformación reemplaza el coeficiente convectivo de la ecuación 14 por una función de una nueva variable dependiente llamada potencial de Hopf y Cole ( $u_*$ ):

$$1 - \beta + 2\beta \theta_* = -2 \frac{1}{u_*} \frac{\partial u_*}{\partial z_*} \quad (15)$$

La transformación de Hopf y Cole, en combinación con la difusividad de Fujita (1952) y la relación entre la difusividad y la conductividad hidráulicas de Parlange *et al.* (1982) (Fuentes *et al.*, 1992), ha sido utilizada en trabajos en flujo bifásico en los suelos por Rogers *et al.* (1983), en flujo monofásico por Sanders *et al.* (1988). Las soluciones de estos autores han sido adaptadas por Warrick y Parkin (1995) al caso de drenaje unidimensional en una columna semi-infinita, y a la situación del flujo del agua en una columna finita por Hills y Warrick (1993).

De la transformación de Hopf y Cole (ecuación 15), se deduce:

$$\beta \frac{\partial \theta_*}{\partial t_*} = \frac{1}{u_*^2} \frac{\partial u_*}{\partial z_*} \frac{\partial u_*}{\partial t_*} - \frac{1}{u_*} \frac{\partial^2 u_*}{\partial t_* \partial z_*} \quad (16)$$

$$\beta \frac{\partial \theta_*}{\partial z_*} = \frac{1}{u_*^2} \left( \frac{\partial u_*}{\partial z_*} \right)^2 - \frac{1}{u_*} \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} \quad (17)$$

$$\beta \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial z_*^2} = \frac{3}{u_*^2} \frac{\partial u_*}{\partial z_*} \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} - \frac{2}{u_*^3} \left( \frac{\partial u_*}{\partial z_*} \right)^3 - \frac{1}{u_*} \frac{\partial^3 u_*}{\partial z_*^3} \quad (18)$$

La introducción de las ecuaciones 15 a 17 en la ecuación 14, después de una simplificación, conduce a:

$$\frac{\partial}{\partial z_*} \left[ \frac{1}{u_*} \left( \frac{\partial u_*}{\partial t_*} - \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} \right) \right] = 0 \quad (19)$$

La ecuación 19 es satisfecha por la ecuación lineal del calor:

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} = \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} \quad (20)$$

Las condiciones que sujetan a la ecuación 20 se deducen de la propia transformación de Hopf y Cole. La condición en la frontera ( $\theta_* = 1$ ) se transforma en una condición de radiación:

$$\frac{\partial u_*}{\partial z_*} + \frac{1 + \beta}{2} u_* = 0 \quad (21)$$

y la condición inicial ( $\theta_* = 0$ ) en:

$$u_* = \exp \left( \frac{1 - \beta}{2} z_* \right) \quad (22)$$

La solución del sistema (ecuaciones 20 a 22) se obtiene con la aplicación de la transformada de Laplace (Carslaw y Jaeger, 1959), es decir:

$$u_* = \frac{1 + \beta}{2} \exp \left[ -\frac{1 + \beta}{2} \left( z_* - \frac{1 + \beta}{2} t_* \right) \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{z_*}{2\sqrt{t_*}} - \frac{1 + \beta}{2} \sqrt{t_*} \right] - \frac{\beta}{2} \exp \left[ \frac{1 - \beta}{2} \left( z_* + \frac{1 - \beta}{2} t_* \right) \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{z_*}{2\sqrt{t_*}} + \frac{1 - \beta}{2} \sqrt{t_*} \right] + \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{1 - \beta}{2} \left( z_* - \frac{1 - \beta}{2} t_* \right) \right] \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[ \frac{z_*}{2\sqrt{t_*}} - \frac{1 - \beta}{2} \sqrt{t_*} \right] \right\} \quad (23)$$

Para obtener la solución  $\theta_*$  ( $z_*$ ,  $t_*$ ), la ecuación 23, junto con su derivada,

$$\frac{\partial u_*}{\partial z_*} = -\frac{1}{4} (1 + \beta)^2 \exp \left[ -\frac{1 + \beta}{2} \left( z_* - \frac{1 + \beta}{2} t_* \right) \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{z_*}{2\sqrt{t_*}} - \frac{1 + \beta}{2} \sqrt{t_*} \right] - \frac{1}{4} \beta (1 - \beta) \exp \left[ \frac{1 - \beta}{2} \left( z_* + \frac{1 - \beta}{2} t_* \right) \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{z_*}{2\sqrt{t_*}} + \frac{1 - \beta}{2} \sqrt{t_*} \right] - \frac{1}{4} (1 - \beta) \exp \left[ -\frac{1 - \beta}{2} \left( z_* - \frac{1 - \beta}{2} t_* \right) \right] \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[ \frac{z_*}{2\sqrt{t_*}} - \frac{1 - \beta}{2} \sqrt{t_*} \right] \right\} \quad (24)$$

deben ser introducidas en la transformación de Hopf y Cole (ecuación 15).

La lámina infiltrada se obtiene de las ecuaciones 5.6 y 15:

$$l_*(t_*) = -\frac{1}{\beta} \ln \left[ \exp \left( \frac{1-\beta}{2} z_* \right) u(z_*, t_*) \right]_0^\infty \quad (25)$$

La introducción de la ecuación 23 en la ecuación 25 permite obtener la solución para la evolución en el tiempo de la lámina infiltrada:

$$l_* = t_* + \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{1+\beta}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{1+\beta}{2} \sqrt{t_*} \right) \right] + \frac{1-\beta}{2} \exp(-\beta t_*) \operatorname{erfc} \left( \frac{1-\beta}{2} \sqrt{t_*} \right) \right\} \quad (26)$$

y a partir de ésta, el flujo en la superficie del suelo, conocido también como flujo de infiltración o velocidad de infiltración:

$$Q_* = 1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi t_*}} \exp \left[ -\frac{(1+\beta)^2}{4} t_* \right] - \frac{1-\beta}{2} \exp(-\beta t_*) \operatorname{erfc} \left[ \frac{1-\beta}{2} \sqrt{t_*} \right]}{\frac{1+\beta}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{1+\beta}{2} \sqrt{t_*} \right) \right] + \frac{1-\beta}{2} \exp(-\beta t_*) \operatorname{erfc} \left( \frac{1-\beta}{2} \sqrt{t_*} \right)} \quad (27)$$

De la solución (ecuación 26) se deduce la solución para el suelo lineal (ecuación 10), cuando  $\beta \rightarrow 0$ , y la solución de Knight (ecuación 11), cuando  $\beta \rightarrow 1$ .

El comportamiento de la solución en los tiempos cortos es el siguiente:

$$l - K_0 t = S_1 \sqrt{t} + S_2 t + O(t^{3/2}) \quad (28)$$

donde  $S_1 = S$  (la sorbilidad) y

$$S_2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) \beta \right] (K_1 - K_0) \quad (29)$$

Para el suelo lineal ( $\beta = 0$ )  $S_2/(K_1 - K_0) = 1/2$  y para el suelo de Knight ( $\beta = 1$ )  $S_2/(K_1 - K_0) = 1 - 2/\pi \approx 0.363$ .

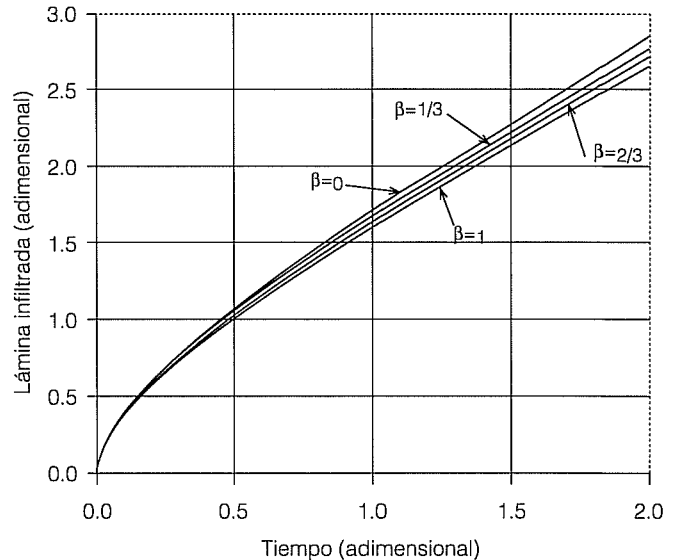
El comportamiento en el infinito se deduce del límite:

$$l_{0*} = \lim_{t_* \rightarrow \infty} [l_* - t_*] = \frac{1}{\beta} \ln(1+\beta) \quad (30)$$

donde  $l_{0*}$  representa la ordenada en el origen. Para el suelo lineal  $l_{0*} = 1$  y para el suelo de Knight a:  $l_{0*} = \ln 2 \approx 0.693$ .

La ilustración 1 muestra la evolución de la lámina infiltrada proporcionada por la ecuación 26 en función del tiempo para diferentes valores del parámetro  $\beta$  y en el cuadro 1 se presentan algunos valores numéricos correspondientes.

**Ilustración 1. La solución cuasi-lineal de la infiltración. Comprende el "suelo lineal" ( $\beta=0$ ), y la solución de Knight ( $\beta=1$ ).**



**Cuadro 1. Algunos valores numéricos de la solución cuasi-lineal de la infiltración, el tiempo y la lámina infiltrada son adimensionales. El "suelo lineal" corresponde a  $\beta = 0$  y la solución de Knight, a  $\beta = 1$ .**

| Tiempo adimensional | Lámina infiltrada adimensional |               |               |             |
|---------------------|--------------------------------|---------------|---------------|-------------|
|                     | $\beta = 0$                    | $\beta = 1/3$ | $\beta = 2/3$ | $\beta = 1$ |
| 0.01                | 0.118                          | 0.118         | 0.117         | 0.117       |
| 0.02                | 0.170                          | 0.169         | 0.168         | 0.167       |
| 0.04                | 0.246                          | 0.245         | 0.243         | 0.241       |
| 0.06                | 0.308                          | 0.305         | 0.302         | 0.300       |
| 0.08                | 0.361                          | 0.358         | 0.354         | 0.351       |
| 0.10                | 0.410                          | 0.405         | 0.401         | 0.397       |
| 0.15                | 0.518                          | 0.511         | 0.504         | 0.498       |
| 0.20                | 0.613                          | 0.604         | 0.596         | 0.587       |
| 0.30                | 0.783                          | 0.770         | 0.758         | 0.746       |
| 0.40                | 0.937                          | 0.920         | 0.904         | 0.888       |
| 0.50                | 1.081                          | 1.060         | 1.040         | 1.020       |
| 0.60                | 1.217                          | 1.192         | 1.169         | 1.146       |
| 0.70                | 1.348                          | 1.320         | 1.293         | 1.267       |
| 0.80                | 1.475                          | 1.443         | 1.413         | 1.385       |
| 0.90                | 1.599                          | 1.564         | 1.530         | 1.499       |
| 1.00                | 1.720                          | 1.682         | 1.645         | 1.611       |
| 1.20                | 1.956                          | 1.911         | 1.869         | 1.831       |
| 1.40                | 2.186                          | 2.135         | 2.088         | 2.045       |
| 1.60                | 2.410                          | 2.354         | 2.302         | 2.256       |
| 1.80                | 2.631                          | 2.570         | 2.514         | 2.464       |
| 2.00                | 2.849                          | 2.783         | 2.723         | 2.670       |

## Aplicaciones

La solución analítica ha sido deducida a partir de características hidrodinámicas específicas, la difusividad asumida constante y la conductividad tomada como una interpolación entre una función lineal y una cuadrática de la humedad. Sin embargo, la solución puede ser utilizada como una solución óptima, en el entendido de que ésta satisfaga de manera exacta la propiedad integral del fenómeno de la infiltración, es decir, la evolución en el tiempo de la lámina infiltrada,  $I(t)$ .

La función  $I(t)$  se deduce de las ecuaciones 5.5 y 5.6, a saber:

$$I(t) = K_0 t + \frac{\pi S^2}{4(K_1 - K_0)} I_* \left[ \frac{4(K_1 - K_0)^2}{\pi S^2} t \right] \quad (31)$$

donde se puede observar que en suelos secos:  $K_0 \ll K_1$

$I(t)$  se describe básicamente por tres parámetros: 1) la sorbilidad ( $S$ ), que representa las fuerzas de absorción y que controlan la infiltración en los tiempos muy cortos; 2) el flujo de infiltración permanente ( $K_1$ ), que representa la fuerza gravitacional que controla la infiltración en los tiempos muy largos, y 3) el parámetro  $\beta$ , el cual comienza aparecer en los tiempos cortos, es decir, a partir del segundo término del desarrollo en serie de la solución (ecuaciones 28 y 29).

La sorbilidad puede ser calculada con alguna de las fórmulas clásicas propuestas en la literatura (Crank 1956; Parlange 1975; Brutsaert, 1976). La estructura de estas fórmulas es la siguiente:

$$S^2 = 2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta - \theta_0}{f(\theta)} D(\theta) d\theta = 2 \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{\theta(\psi) - \theta_0}{f[\theta(\psi)]} K(\psi) d\psi \quad (32)$$

donde  $\psi_0$  y  $\psi_1$  son las presiones correspondientes a  $\theta_0$  y  $\theta_1$ , respectivamente.

De acuerdo con Parlange, la función  $f(\theta)$  puede ser aproximada por  $f(\theta) = 20\theta_*/(1+\theta_*)$ , en la cual  $\theta_*$  está definida por la ecuación 5.1. Cuando la difusividad se asimila a una densidad de Dirac  $f(\theta) = \theta_*$ , con  $\gamma = 1$ ; la aproximación de Crank corresponde a  $\gamma = 2 - \pi/2 \approx 0.4292$  y la aproximación de Brutsaert a  $\gamma = 1/2$ . Se debe notar que la aproximación de Crank proporciona de manera exacta la ecuación 5.2, que define el valor de la difusividad constante.

El parámetro  $\beta$  es análogo al parámetro introducido por Parlange *et al.* (1982) para deducir la solución general que tiene como casos particulares las soluciones de Green y Ampt (1911) y de Talsma y Parlange (1972). La solución de Parlange *et al.* es una solución exacta

de la ecuación Fokker-Planck cuando la difusividad se asimila a una densidad de Dirac y es óptima en una amplia gama de suelos. La deducción de la solución se obtiene cuando se asume una relación entre la conductividad y la difusividad de la siguiente manera (Parlange *et al.*, 1982; Fuentes *et al.*, 1990):

$$\frac{K(\theta) - K_0}{K_1 - K_0} = \left( \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \right) \left[ 1 - \beta + \beta \frac{\int_{\theta_0}^{\theta} D(\vartheta) d\vartheta}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} D(\vartheta) d\vartheta} \right] \quad (33)$$

Se debe notar que esta relación contiene como caso particular las características hidrodinámicas utilizadas para obtener la solución cuasi-lineal. En efecto, asumiendo una difusividad constante se deduce precisamente la conductividad proporcionada por la ecuación 2 en escritura adimensional. Puesto que la solución óptima es una solución que conserva propiedades integrales, el parámetro  $\beta$  puede obtenerse a través de la integración de la ecuación 33, en relación con la variable definida como el cociente de integrales que aparecen en el segundo miembro. La expresión que resulta es la siguiente:

$$\beta = 2 \left\{ 1 - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[ \frac{K(\theta) - K_0}{K_1 - K_0} \right] \left( \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta - \theta_0} \right) D(\theta) d\theta \right\} \left/ \int_{\theta_0}^{\theta_1} D(\theta) d\theta \right\} \quad (34)$$

con una difusividad constante y la conductividad definida por la ecuación 12, la ecuación 33 se vuelve una identidad como se esperaba.

Las ecuaciones 32 y 34 permiten introducir otras características hidrodinámicas para utilizar las ecuaciones 26 y 31 para describir la evolución de la lámina infiltrada en función del tiempo. A continuación se ilustra el procedimiento con la fórmula propuesta por Van Genuchten (1980) para la curva característica de humedad, y con la fórmula propuesta por Brooks y Corey (1964) para la curva de conductividad hidráulica:

$$\frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[ 1 + \left( \frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (35)$$

$$K(\theta) = K_s \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (36)$$

donde  $\theta_s$  es el contenido de humedad a saturación;  $\theta_r$  es el contenido de humedad residual;  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación;  $\psi_d$  es un valor característico de la presión;  $m$ ,  $n$  y  $\eta$  son exponentes empíricos positivos.

La difusividad hidráulica se deduce de las ecuaciones 35 y 36, a saber:

$$D(\theta) = \frac{K_s |\Psi_d|}{mn(\theta_s - \theta_r)} \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{\eta - 1/mn - 1} \left[ 1 - \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{1/m} \right]^{1/n - 1} \quad (37)$$

Con la finalidad de obtener soluciones cerradas de los modelos de predicción de la conductividad hidráulica propuestos por Burdine (1953) y Mualem (1976), Van Genuchten (1980) impone algunas relaciones entre  $m$  y  $n$  de la ecuación 35. Después de un análisis exhaustivo del efecto de estas relaciones sobre los parámetros integrales del fenómeno de la infiltración, Fuentes *et al.* (1990) proponen utilizar la relación  $m = 1 - 2/n$  impuesta en el modelo de Burdine.

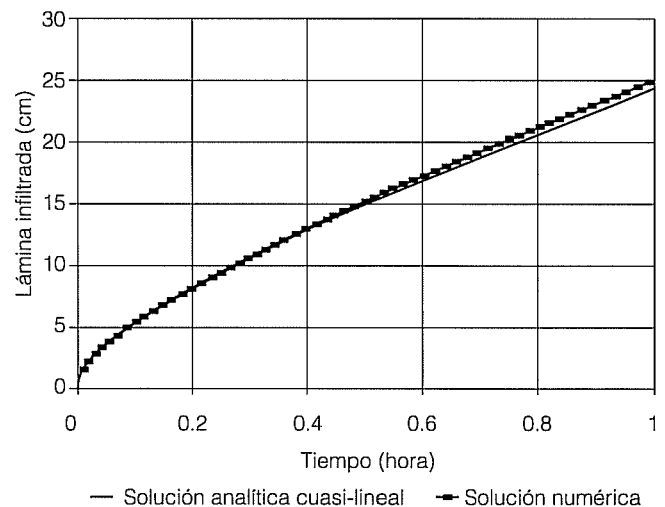
En el cuadro 2 se presentan los valores de los parámetros de las características hidrodinámicas de tres suelos contrastantes: a) una arena de Tezoyuca, Morelos, b) un franco de Montecillo, Estado de México, y c) una arcilla del Valle del Carrizo, Sinaloa. El primero fue caracterizado en una muestra alterada en laboratorio y los dos restantes, en condiciones de campo. El método de caracterización utilizado es el propuesto por Fuentes (1992) y que está basado en la curva granulométrica y en una prueba de infiltración. Se ha utilizado la relación entre  $m$  y  $\eta$  propuesta por Fuentes *et al.* (2001):  $\eta = 2d/(2/mn + 1)$ , donde  $d$  es una función de la porosidad total del suelo ( $\phi$ ) definida implícitamente por  $(1 - \phi)^d + \phi^{2d} = 1$ .

En el cuadro 3 se presentan los valores utilizados para ilustrar la solución cuasi-lineal de la infiltración definida por las ecuaciones 26 y 31 en los tres suelos contrastantes. El contenido de humedad en la superficie del suelo ( $\theta_1$ ) fue igual al contenido de humedad a saturación ( $\theta_s$ ), y éste, a su vez, igual al valor de la porosidad total del suelo ( $\phi$ ). El contenido de humedad inicial ( $\theta_0$ ) se tomó igual al valor experimental medido durante la caracterización hidrodinámica de los suelos. La sorbilidad ( $S$ ) es estimada con la ecuación 32, utilizando  $f(\theta) = \theta_*$  debido a que la difusividad propor-

cionada por la ecuación 37 está prácticamente concentrada en saturación. Finalmente, el parámetro  $\beta$  se calcula con la ecuación 34.

En las ilustraciones 2a, 2b y 2c se muestran las gráficas de la lámina infiltrada, en función del tiempo calculada con la solución cuasi-lineal (ecuaciones 26 y 31). Esta función se compara con la solución numérica de Zataráin *et al.* (1998) de la ecuación de Richards (1931); es decir, la ecuación 1 con la presión del agua en el suelo como variable dependiente, utilizando las características hidrodinámicas definidas por las ecuaciones 35 y 36, con los valores de sus parámetros reportados en el cuadro 2 y sujeta a las condiciones inicial y de frontera proporcionadas por el cuadro 3. En los tiempos cortos no existe diferencia significativa entre las soluciones, las discrepancias son más importantes en los tiempos largos, sobre todo en el suelo arenoso. Lo anterior era de esperarse, ya que en estos suelos, la difusividad hidráulica dista mucho de poder representarse por un valor constante, sobre todo el

**Ilustración 2a. La lámina infiltrada en función del tiempo en el suelo, arena de Tezoyuca, Morelos. Se compara la solución cuasi-lineal con la solución numérica de la ecuación de Richards.**



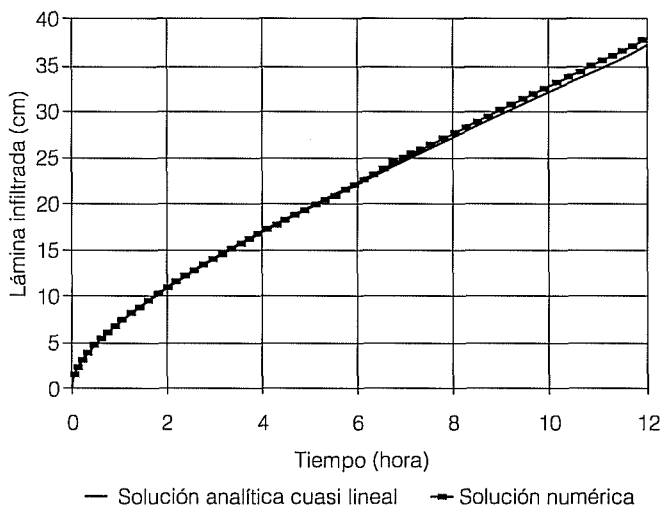
**Cuadro 2. Valores de los parámetros de las características hidrodinámicas definidas por las ecuaciones 35 y 36 para tres suelos contrastantes.**

| Suelo                | $\theta_r$<br>(cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> ) | $\theta_s$<br>(cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> ) | $\Psi_d$<br>(cm) | $k_s$<br>(cm/h) | $m = 1 - 2/n$ | $\eta$ |
|----------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------|-----------------|---------------|--------|
| Arena de Tezoyuca    | 0.0                                               | 0.4649                                            | -15.0            | 16.8            | 0.3851        | 3.57   |
| Franco de Montecillo | 0.0                                               | 0.4865                                            | -32.7            | 2.3             | 0.1258        | 11.00  |
| Arcilla del Carrizo  | 0.0                                               | 0.5000                                            | -55.0            | 2.0             | 0.0450        | 30.87  |

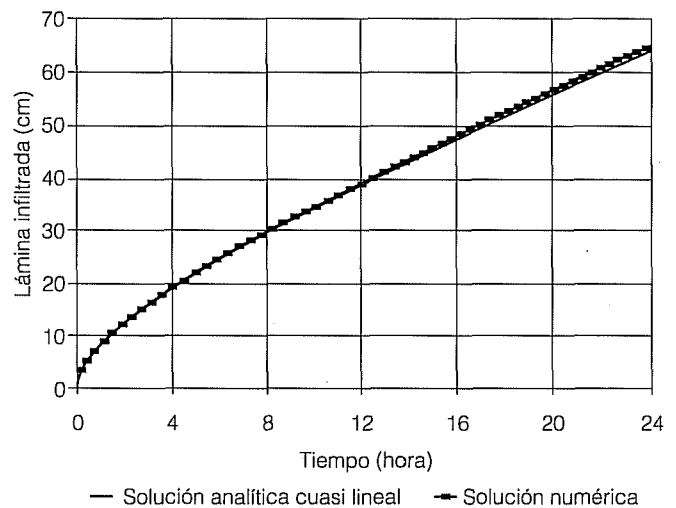
**Cuadro 3. Valores de los parámetros utilizados para ilustrar la solución cuasi-lineal de la infiltración definida por la ecuaciones 26 y 31 para los tres suelos reportados en el cuadro 2.**

| Suelo                | $\theta_0$<br>(cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> ) | $\theta_1$<br>(cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> ) | $K_0$<br>(cm/h)       | $K_1$<br>(cm/h) | $S$<br>(cm <sup>3</sup> /h) | $\beta$ |
|----------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------------------|-----------------|-----------------------------|---------|
| Arena de Tezoyuca    | 0.0080                                            | 0.4649                                            | $8.45 \times 10^{-6}$ | 16.8            | 14.97                       | 0.4423  |
| Franco de Montecillo | 0.2366                                            | 0.4865                                            | $8.28 \times 10^{-4}$ | 2.3             | 6.23                        | 0.6712  |
| Arcilla del Carrizo  | 0.2500                                            | 0.5000                                            | $1.03 \times 10^{-9}$ | 2.0             | 7.63                        | 0.7857  |

**Ilustración 2b. La lámina infiltrada en función del tiempo en el suelo, franco de Montecillo, Estado de México. Se compara la solución cuasi-lineal con la solución numérica de la ecuación de Richards.**



**Ilustración 2c. La lámina infiltrada en función del tiempo en el suelo, arcilla del Valle del Carrizo, Sinaloa. Se compara la solución cuasi-lineal con la solución numérica de la ecuación de Richards.**



rango de humedad. Sin embargo, la solución cuasi-lineal puede ser utilizada para describir la lámina infiltrada en función del tiempo en casos de interés práctico, como el riego en melgas.

## Conclusiones

Se ha establecido la solución exacta de la ecuación Fokker-Planck de la infiltración unidimensional vertical cuando la difusividad hidráulica es considerada constante y la conductividad hidráulica es una función cuadrática del contenido volumétrico de agua. Esta solución cuasi-lineal de la infiltración contiene, como casos particulares, la solución clásica conocida como "suelo lineal" y la solución de Knight. La lámina infiltrada acumulada, en función del tiempo proporcionada por la solución cuasi-lineal, se ha comparado con la lámina infiltrada proporcionada por la solución numérica de la ecuación de Richards en tres suelos de propiedades hidrodinámicas contrastantes. El buen acuerdo entre las láminas infiltradas ha mostrado que

la solución cuasi-lineal puede utilizarse en suelos donde la hipótesis aceptada sobre la difusividad y conductividad hidráulicas para su deducción no es satisfecha.

Recibido: 18/03/2001

Aprobado: 25/05/2001

## Referencias

- Brooks, R.H. y A.T. Corey, "Hydraulic Properties of Porous Media", *Hydrol.*, pap. 3, Colorado State University, Fort Collins, 1964.
- Brutsaert, W., "The Concise Formulation of Diffusive Sorption of Water in a Dry Soil", *Water Resources Research*, vol. 12, 1976, pp. 1118-1124.
- Burdine, N.T., "Relative Permeability Calculation from Size Distribution Data", *Trans. AIME*, vol. 198, 1953, pp. 71-78.
- Burgers, J.M., "A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence", *Adv. Appl. Mech.*, vol. 1, 1948, pp. 171-199.
- Carslaw, H.S. y J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, 1959.

- Cole, J.D., "On a Quasi-Linear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics", *Q. Appl. Math.*, vol. 9, 1951, pp. 225-236.
- Crank, J., *The Mathematics of Diffusion*, Oxford Univ. Press, Londres y Nueva York, 1956.
- Fuentes, C., R. Haverkamp y J.Y. Parlange, "Parameter Constraints on Closed-Form Soil-Water Relationships", *J. of Hydrology*, vol. 134, 1992, pp. 117-142.
- Fuentes, C., *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*, tesis de doctorado, Université Joseph Fourier de Grenoble, Francia, 1992, 267 pp.
- Fuentes, C., F. Brambila, M. Vauclin, J.Y. Parlange y R. Haverkamp, "Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados", *Ingeniería Hidráulica en México*, vol. 16, núm. 2, 2001, pp. 119-137.
- Fujita, H., "The Exact Pattern of a Concentration-Dependent Diffusion in a Semi-Infinite Medium, part II", *Textile Research Journal*, vol. 22, 1952, pp. 823-827.
- Green, W.H. y G.A. Ampt, "Studies in Soil Physic, I: The Flow of Air and Water Through Soils", *J. Agric. Sci.*, vol. 4, 1911, pp. 1-24.
- Hills, R.G. y A.W. Warrick, "Burgers' Equation: A Solution for Soil Water Flow in a Finite Length", *Water Resources Res.*, vol. 29, 1993, pp. 1179-1184.
- Hopf, E., "The Partial Differential Equation . Commun", *Pure Appl. Math.*, vol. 3, 1950, pp. 201-230.
- Knight, J.H., en Philip, J.R. (1974), "Recent Progress in the Solution of Nonlinear Diffusion Equations", *Soil Sci.*, vol. 117, núm. 5, 1973, pp. 257-264.
- Mualem, Y., "A New Model for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Porous Media", *Water Resources Res.*, vol. 12, núm. 3, 1976, pp. 513-522.
- Parlange, J.Y., "On Solving the Flow Equation in Unsaturated Soils by Optimization: Horizontal Infiltration", *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, vol. 39, 1975, pp. 415-418.
- Parlange, J.Y., R.D. Braddock, I. Lisle y R.E. Smith, "Three Parameter Infiltration Equation", *Soil Sci.*, vol. 111, 1982, pp. 170-174.
- Philip, J.R., "Theory of Infiltration", *Adv. in Hydrosci.*, vol. 5, 1969, pp. 215-296.
- Richards, L.A., "Capillary Conduction of Liquids through Porous Mediums", *Physics 1*, 1931, pp. 318-333.
- Rogers, C., M.P. Stallybrass y D.L. Clements, "On Two-Phase Filtration under Gravity and with Boundary Infiltration Application of a Bäcklund Transformation", *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, vol. 7, 1983, pp. 785-799.
- Sanders, G.C., J.Y. Parlange, V. Kühnel, W.I. Hogart, D. Lockington y J.P.J. O'Kane, "Exact Nonlinear Solution for Constant Flux Infiltration", *J. of Hydrology*, vol. 97, 1988, pp. 341-346.
- Talsma, T. y J.Y. Parlange, "One-Dimensional Vertical Infiltration", *Aust. J. Soil Res.*, vol. 10, 1972, pp. 143-150.
- Warrick, A.W. y G.W. Parkin, "Analytical Solution for One-Dimensional Drainage: Burgers' and Simplified Forms", *Water Resources Res.*, vol. 31, 1995, pp. 2891-2894.
- Van Genuchten, M., "A Closed-Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils", *Soil Sci. Soc. Amer. J.*, vol. 44, 1980, pp. 892-898.
- Zataráin, F., C. Fuentes, O.L. Palacios, J.R. Mercado, F. Brambila y N.H. García, "Modelación del transporte de agua y de solutos en el suelo", *Agrociencia*, vol. 32, núm. 4, 1998, pp. 373-383.

### Abstract

Fuentes, C., J.Y. Parlange, R. Haverkamp & M. Vauclin, "The Quasi-Linear Solution of Vertical Infiltration", *Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish)*, vol. XVI, num. 4, pages 25-33, October-December, 2001.

The exact solution of the one-dimensional vertical infiltration equation is deduced, when the hydraulic diffusivity is considered constant and the hydraulic conductivity is a combination of both a linear and quadratic functions of the soil water content. This quasi-linear solution includes as particular cases, both the classical solution known as "linear soil" and the Knight solution. The cumulative infiltrated water as a function of time provided by the quasi-linear solution has been compared with the cumulative infiltrated water obtained from the numerical solution of the Richards equation on three different soils of contrasting hydrodynamic properties. The good agreement between the two solutions has shown that the quasi-linear solution can be used on soils where the accepted hypothesis, on hydraulic diffusivity and hydraulic conductivity, for its deduction is not satisfied.

**Key words:** Burgers' equation, optimal quasi-linear solution.

### Dirección institucional de los autores:

*Carlos Fuentes*

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua  
Paseo Cuauhnáhuac 8532, 62550 Progreso, Morelos, México.  
Correo electrónico: cfuentes@tlaloc.imta.mx

*Jean-Yves Parlange*

Department of Agricultural and Biological Engineering  
Riley-Robb Hall, Cornell University  
Ithaca, New York 14853-1901, USA.

*Randel Haverkamp*

*Michel Vauclin*

Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement  
UMR 5564 (CNRS, INPG, IRD, UJF) BP 53, 38041  
Grenoble-Cedex, France.