

Flujo en canales trapeciales de gasto decreciente con vertedor lateral

Gilberto Sotelo Ávila

Universidad Nacional Autónoma de México

La solución directa de la ecuación diferencial del flujo en canales prismáticos de gasto decreciente con vertedor lateral, fue obtenida por de Marchi (1934) para el canal rectangular prismático con la hipótesis de energía específica constante, la cual ha sido plenamente comprobada en laboratorio. Soluciones de tipo numérico han sido publicadas recientemente por Uyumaz y Muslu (1985) para canales circulares y por Uyumaz (1997) para canales de sección U con su correspondiente verificación experimental, pero utilizando una representación gráfica de la función usada en el cálculo del perfil de flujo. En este artículo se presenta la solución directa en el canal trapecial aplicable a régimen subcrítico y supercrítico.

Palabras clave: vertedor lateral, canales trapeciales con vertedor lateral, canales de gasto decreciente, flujo espacialmente variado.

Antecedentes

La observación experimental del flujo espacialmente variado de gasto decreciente en un canal con vertedor lateral muestra que la desviación de caudal hacia el exterior del canal no produce cambios en la energía específica del flujo, siendo el principio de energía más conveniente para su análisis. Cuando el canal es prismático y de pendiente pequeña, la ecuación diferencial que gobierna el flujo es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx}}{1 - F^2} \quad (1)$$

donde x es la coordenada sobre el fondo del canal que ubica una sección donde el tirante es y ; el área, A ; el número de Froude, F ; el gasto, Q ; el coeficiente de coriolis, α , y la pendiente de fricción, S_f . La pendiente del canal es S_0 y la aceleración de la gravedad es g .

De Marchi (1934) obtuvo por primera vez la integración directa de la ecuación 1 en un canal rectangular, con la hipótesis de que los vertedores laterales son cortos y por ello $S_0 \approx S_f$, es decir, la energía específica E y el coeficiente α se mantienen constantes. Soluciones de tipo numérico han sido también obtenidas con la misma hipótesis por Uyumaz y Muslu (1985) y Uyumaz

(1997). En este trabajo se extiende la solución a canales trapeciales, usando la misma hipótesis y la simbología de la ilustración 1, donde $x \in [0, L]$ y $y \in [y_0, y_L]$.

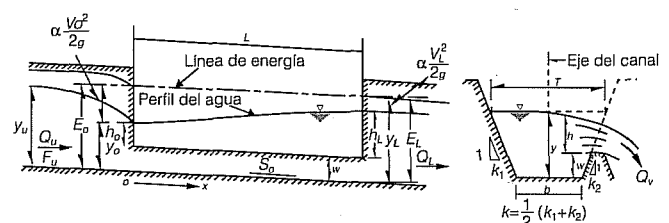
De la definición de energía específica E , el caudal en cualquier sección del canal vale:

$$Q = A \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (E - y)} \quad (2)$$

Por otra parte, el gasto vertido por unidad de longitud de cresta (o de longitud del canal) también está dado por la ecuación típica del vertedor rectangular:

$$-\frac{dQ}{dx} = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} (y - w)^{3/2} \quad (3)$$

Ilustración 1.



a) Corte longitudinal

b) Sección transversal

donde μ es el coeficiente de vertido (adimensional) independiente de x y w es la altura de la cresta del vertedor desde el fondo del canal, como se muestra en la ilustración 1. Con las dos ecuaciones anteriores, el numerador y denominador de la ecuación 1 se desarrollan como sigue:

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx} &= \frac{\alpha A \sqrt{2g/\alpha} \sqrt{E-y}}{gA^2} \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} (y-w)^{3/2} = \\ \frac{4}{3} \frac{\sqrt{\alpha} \mu}{A} \sqrt{E-y} (y-w)^{3/2}; 1-F^2 &= 1 - \frac{\alpha Q^2 T}{gA^3} = \\ -\frac{A^2 (2g) (E-y) T}{gA^3} &= 1 - \frac{2T}{A} (E-y) = \frac{A-2T(E-y)}{A} \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación dinámica del flujo en un canal de cualquier forma de sección se convierte en:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{\alpha} \mu \sqrt{E-y} (y-w)^{3/2}}{A-2T(E-y)} \quad (4)$$

Solución en canal trapezoidal

Para la sección trapezoidal de talud medio k , el área hidráulica y ancho de superficie libre son: $A = by + ky^2$, $T = b + 2ky$; por tanto, el denominador de la ecuación anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} A-2T(E-y) &= by + ky^2 - 2(b+2ky)(E-y) = \\ b(3y-2E) + k(5y^2-4Ey) \end{aligned}$$

de manera que la ecuación 4 y su solución resultan:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{b(3y-2E) + k(5y^2-4Ey)}{\frac{4}{3} \sqrt{\alpha} \mu \sqrt{E-y} (y-w)^{3/2}} \\ x &= \frac{3}{4} \frac{b}{\sqrt{\alpha} \mu} \int \frac{(3y-2E) dy}{\sqrt{E-y} (y-w)^{3/2}} + \\ \frac{3k}{4\sqrt{\alpha} \mu} \int \frac{(5y^2-4Ey) dy}{\sqrt{E-y} (y-w)^{3/2}} &+ \text{constante} \end{aligned} \quad (5)$$

La solución de la primera integral vale para el canal rectangular (cuando $k = 0$). Fue obtenida por de Marchi en 1934 y es:

$$I_1 = \frac{3}{2} \frac{b}{\sqrt{\alpha} \mu} \left[\frac{2E-3w}{E-w} \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} - 3 \arcsen \sqrt{\frac{E-y}{E-w}} \right]$$

Para obtener la solución de la segunda integral, se efectúa la división:

$$\begin{aligned} \frac{5y^2-4Ey}{y-w} &= 5y + (5w-4E) + \frac{(5w-4E)w}{y-w} = \\ 5 \left[y + \left(w - \frac{4E}{5} \right) \left(1 + \frac{w}{y-w} \right) \right] \end{aligned}$$

Por tanto, el desarrollo de dicha integral resulta:

$$I_2 = \frac{15k}{4\sqrt{\alpha} \mu} \left[\int \frac{y dy}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} + \left(w - \frac{4E}{5} \right) \int \frac{1+w/(y-w)}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} dy \right]$$

La primera integral que aparece en I_2 se desarrolla y resuelve como sigue:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{y dy}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} = \int \frac{y dy}{\sqrt{Ey-Ew-y^2+wy}} = \\ &= \int \frac{y dy}{\sqrt{-y^2+(E+w)y-Ew}} \end{aligned}$$

$$I_3 = -(y-w) \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} + \frac{E+w}{2} \arcsen \left(\frac{2y-(E+w)}{E-w} \right) \quad (6)$$

La segunda integral que aparece en I_2 se divide en dos partes, como sigue:

$$\int \frac{1+w/(y-w)}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} dy = \int \frac{dy}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} + \int \frac{w/(y-w)}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} dy$$

Con el mismo desarrollo de I_3 , la solución de la primera parte resulta:

$$I_4 = \int \frac{dy}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} = \arcsen \left(\frac{2y-(E+w)}{E-w} \right) \quad (7)$$

Para la segunda parte se sigue el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \frac{w/(y-w)}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} dy = -\frac{w}{E-w} \times \\ &\int \frac{y-w}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} \frac{(y-w)(-dy) - (E-y) dy}{(y-w)^2} \\ I_5 &= -\frac{w}{E-w} \int \left(\frac{E-y}{y-w} \right)^{-1/2} d \left(\frac{E-y}{y-w} \right) \end{aligned}$$

cuya solución se convierte en:

$$l_5 = -\frac{2w}{E-w} \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} \quad (8)$$

Con los resultados de l_3 , l_4 e l_5 , además de algunas transformaciones adicionales, l_2 se convierte en:

$$l_2 = \frac{15k}{4\sqrt{\alpha\mu}} \left\{ -(y-w) \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} + \frac{E+w}{2} \arcsen \left(\frac{2y-(E+w)}{E-w} \right) \right. \\ \left. + \left(w - \frac{4E}{5} \right) \left[\arcsen \left(\frac{2y-(E+w)}{E-w} \right) - \frac{2w}{E-w} \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} \right] \right\} \\ l_2 = \frac{15k}{4\sqrt{\alpha\mu}} \left\{ \left(\frac{E+w}{2} + w - \frac{4E}{5} \right) \arcsen \left(\frac{2y-(E+w)}{E-w} \right) \right. \\ \left. - \left[\left(w - \frac{4E}{5} \right) \left(\frac{2w}{E-w} \right) + (y-w) \right] \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} \right\}$$

donde se efectúan las siguientes reducciones:

$$\frac{E+w}{2} + w - \frac{4E}{5} = \frac{5E+5w+10w-8E}{10} = \frac{15w-3E}{10} = \frac{3}{10}(5w-E)$$

$$\left(w - \frac{4E}{5} \right) \frac{2w}{E-w} + y-w = \frac{2w^2 - \frac{8}{5}wE + (E-w)y - wE + w^2}{E-w} \\ = \frac{3w^2 - \frac{13}{5}wE + (E-w)y}{E-w} = \left[\frac{(13E-15w)w}{5(E-w)} - y \right]$$

Por tanto:

$$l_2 = \frac{9k}{8\sqrt{\alpha\mu}} (5w-E) \arcsen \left[\frac{2y-(E+w)}{E-w} \right] + \frac{3k}{4\sqrt{\alpha\mu}} \left[\frac{(13E-15w)w}{E-w} - 5y \right] \sqrt{\frac{E-w}{y-w}} \quad (9)$$

sustituyendo los resultados de l_1 e l_2 en la ecuación 5, se obtiene:

$$x = \frac{3b}{2\sqrt{\alpha\mu}} \left[\frac{2E-3w}{E-w} \sqrt{\frac{E-w}{y-w}} - 3 \arcsen \sqrt{\frac{E-y}{E-w}} \right] \\ + \frac{3k}{4\sqrt{\alpha\mu}} \left[\left(\frac{(13E-15w)w}{E-w} - 5y \right) \sqrt{\frac{E-w}{y-w}} + \frac{3}{2}(5w-E) \arcsen \left(\frac{2y-(E+w)}{E-w} \right) \right] + \text{const.} \quad (10)$$

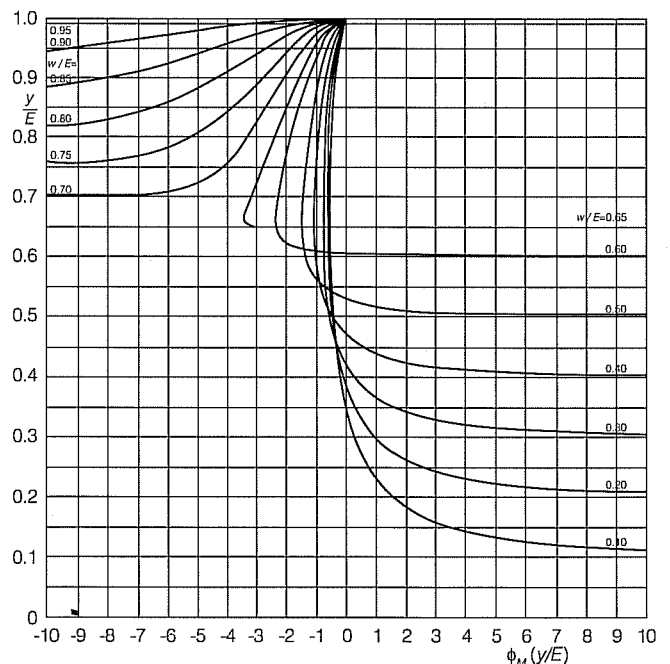
Los términos dentro de los corchetes de la expresión anterior se pueden adimensionalizar dividiéndolos entre E , para definirlos como las funciones:

$$\phi_M \left(\frac{y}{E} \right) = \frac{2-3 \left(\frac{w}{E} \right)}{1-\frac{w}{E}} \sqrt{\frac{1-\frac{y}{E}}{\frac{y}{E}-\frac{w}{E}}} - 3 \arcsen \sqrt{\frac{1-\frac{y}{E}}{1-\frac{w}{E}}} \quad (11)$$

$$\phi_S \left(\frac{y}{E} \right) = \left(\frac{(13-15 \frac{w}{E}) \frac{w}{E} - 5 \frac{y}{E}}{1-\frac{w}{E}} \right) \sqrt{\frac{1-\frac{y}{E}}{\frac{y}{E}-\frac{w}{E}}} + \frac{3}{2} \left(5 \frac{w}{E} - 1 \right) \arcsen \left(\frac{2 \frac{y}{E} - \left(1 + \frac{w}{E} \right)}{1-\frac{w}{E}} \right) \quad (12)$$

donde $\phi_M (y/E)$ es la misma función empleada por de Marchi, y $\phi_S (y/E)$, una nueva función. La primera se representa con el conjunto de curvas mostradas en la ilustración 2 y la segunda con el conjunto de la ilustra-

Ilustración 2. Función $\phi_M (y/E)$ de De Marchi para el canal rectangular con vertedor lateral.



ción 3; cada curva en ambas se identifica con un valor de w/E . Con estas funciones, la ecuación 10 se abre via en la forma:

$$x = \frac{3b}{2\sqrt{\alpha}\mu} \phi_M\left(\frac{y}{E}\right) + \frac{3kE}{4\sqrt{\alpha}\mu} \phi_S\left(\frac{y}{E}\right) + \text{const.}$$

donde la constante se obtiene al considerar que $y = y_0$ cuando $x = 0$. La solución final resulta:

$$x = \frac{3b}{2\sqrt{\alpha}\mu} \left[\phi_M\left(\frac{y}{E}\right) - \phi_M\left(\frac{y_0}{E}\right) \right] + \frac{3kE}{4\sqrt{\alpha}\mu} \left[\phi_S\left(\frac{y}{E}\right) - \phi_S\left(\frac{y_0}{E}\right) \right] \quad (13)$$

con la cual se calcula el perfil del flujo sobre el eje del canal, ya sea régimen subcrítico o supercrítico. La solución existe siempre que y_0 y y sean mayores que w , lo cual siempre ocurre en la práctica.

La longitud del vertedor se obtiene de la ecuación anterior, con la condición de que $y = y_L$ para $x = L$. Su valor es:

$$L = \frac{3b}{2\sqrt{\alpha}\mu} \left[\phi_M\left(\frac{y_L}{E}\right) - \phi_M\left(\frac{y_0}{E}\right) \right] + \frac{3kE}{4\sqrt{\alpha}\mu} \left[\phi_S\left(\frac{y_L}{E}\right) - \phi_S\left(\frac{y_0}{E}\right) \right] \quad (14)$$

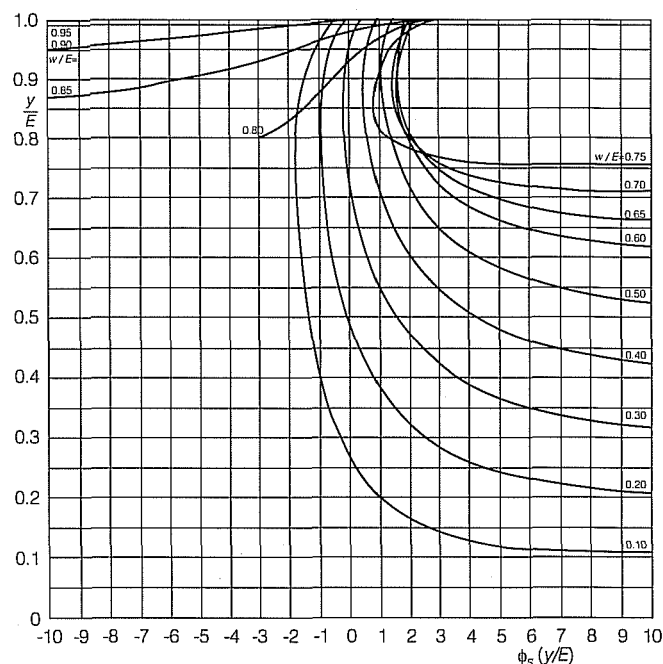
Procedimiento de cálculo

En la práctica, el canal mantiene o no la misma sección, pendiente y rugosidad, en toda su longitud. Se conoce o se calcula el tirante normal para el caudal que habrá en los tramos del canal antes y después del vertedor, así como la energía específica en flujo uniforme, las condiciones críticas y_c y E_c correspondientes al gasto antes y después del vertedor y el tipo de régimen. El gasto vertido es $Q_v = Q_L - Q_u$.

1. Cuando el flujo uniforme es subcrítico antes y después del vertedor se presenta alguno de los siguientes casos:

a) $E_L > E_{cu}$. La energía específica que se mantiene constante en el tramo del vertedor es $E = E_L$, correspondiente al flujo uniforme aguas abajo, y se forma el perfil del flujo que se muestra en la ilustración 1. De la ecuación 2 se obtiene y_0 , el cual debe ser menor que el crítico para Q_0 en dicha sección. La longitud necesaria del vertedor se determina de la ecuación 14.

Ilustración 3. Función $\phi_S(y/E)$ de Sotelo para el canal trapezoidal con vertedor lateral.



b) $E_L < E_{cu}$. No existe solución para y_0 , ya que el caudal que se pretende extraer es muy grande. El caudal del canal antes del vertedor debe ser menor que el dado por la ecuación 2 para $E = E_L$ y $y = y_{cu}$, es decir:

$$Q_0 < A \sqrt{\frac{2g}{\alpha}} (E_L - y_{cu})$$

De acuerdo con los resultados experimentales, el gasto Q_0 debe alcanzar cuando más un valor que produzca un número de Froude al inicio del vertedor, tal

$$\text{que: } F_0 = \frac{Q_0 / A_0}{\sqrt{gA_0 / \alpha T_0}} \leq 0.8$$

2. Cuando el flujo uniforme antes del vertedor es en régimen subcrítico, pero después se vuelve supercrítico, la energía específica E_L del último debe ser mayor o igual que la mínima E_{cu} del primero. Esta última es la que se mantiene constante ($E = E_{cu}$) en el tramo en que se aloja el vertedor para formar un perfil de flujo que se inicia con el tirante $y_0 = y_{cu}$ y termina con $y = y_L$, calculado a partir de la ecuación 2 con $Q = Q_L$. El tirante y varía después hasta adaptarse al normal aguas abajo.

3. Cuando el flujo uniforme es en régimen supercrítico antes y después del vertedor, E_u es la energía específica E que se mantiene constante en el tramo in-

termedio, formando un perfil de flujo que inicia con y_0 y termina con y_L . Con el tirante normal y_0 aguas arriba del vertedor y la ecuación 2, se obtiene y_L , que después varía hasta ajustarse al valor del normal aguas abajo.

4. El perfil mixto es poco frecuente. Ocurre cuando hay régimen supercrítico con energía específica E_u antes del vertedor y subcrítico con energía específica E_L después del mismo. La primera es la que se mantiene constante en la parte supercrítica del perfil, mientras la segunda permanece constante en la parte subcrítica, existiendo un salto hidráulico de transición entre ambas.

En cualquiera de los casos, cuando se conoce la longitud L del vertedor Q_0 o Q_L , se desconocen y_0 y Q_0 o y_L y Q_L . Entonces se iteran valores de y_0 o y_L con la ecuación 13, de manera que se satisfaga el valor de L . Conocido y_0 o y_L de la ecuación 2, se calcula Q_0 o Q_L y $Q_v = Q_0 - Q_L$.

5. El coeficiente de vertido μ debe obtenerse experimentalmente para las distintas condiciones del flujo en el canal y para ello se prepara la instalación necesaria para determinarlo. Sin embargo, se espera que no difiera mucho de los valores que se utilizan en canales rectangulares, es decir, que el talud no tenga mucha influencia en dicho coeficiente.

Conclusiones

La solución obtenida es general dentro de los límites establecidos para los distintos parámetros, ya que para encontrar las ecuaciones equivalentes a 13 y 14 en canales rectangulares o triangulares, es suficiente considerar que $k = 0$ o $b = 0$, respectivamente, en dichas ecuaciones. Los valores de las funciones $\phi_M(y/E)$ y $\phi_S(y/E)$ se pueden determinar de las ilustraciones 2 y 3 para soluciones más rápidas o efectuar el cálculo directo con las ecuaciones 11 y 12. En cualquier caso se observa que ambas tienen valores comparables en igualdad de circunstancias.

Recibido: 03/08/1999

Aprobado: 13/06/2000

Referencias

- De Marchi, G., "Saggio di teoria del funzionamento degli stramassi laterali", *L' Energia Elettrica*, Milán, vol. 2, núm. 11, noviembre de 1934, pág. 849.
- Uyumaz, A., y Y. Muslu, "Flow Over Side Weirs in Circular Channels", *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, vol. 3, núm. 1, enero de 1985, pp. 144-160.
- Uyumaz, A., "Side Weir in U-Shaped Channels", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, vol. 123, núm. 7, julio de 1997, pp. 639-646.

Abstract

Sotelo Ávila, G., "Flow over Side Weirs in Trapezoidal Channels", Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish), vol. XVI, num. 3, pages 85-90, July-September, 2001.

The direct solution of the dynamic equation for spatially varied flow with decreasing discharge in prismatic channels with side weir was first obtained by de Marchi (1934) for the flow in a prismatic rectangular channel, assuming constant specific energy. Such solution has been proved experimentally. New numerical solutions have been determined by Uyumaz y Muslu (1985) for circular and Uyumaz (1997) for U shaped channels, but they use a graphical representation of the function used in the flow profile computation. This paper shows a direct solution in a trapezoidal channel to compute the flow profile in subcritical and supercritical flow.

Key words: side weir, trapezoidal channels with side weir, flow with decreasing discharge, spatially varied flow.

Dirección institucional del autor:

Gilberto Sotelo Ávila

Cerro Verde 59
Colonia Pedregal de San Francisco
Delegación Coyoacán
04320 México, D.F., México
Teléfono: (01) 56 58 55 10
Fax: (01) 56 58 56 12
Correo electrónico: sotelo@servidor.unam.mx