

Cómputo de la incorporación de sedimento en suspensión en flujos turbulentos no permanentes utilizando un enfoque estocástico

José Fernando Rodríguez
Marcelo Horacio García

Universidad de Illinois en Urbana-Champaign

David Mark Admiraal

Universidad de Nebraska en Lincoln

Para calcular la cantidad total y distribución vertical de sedimento en suspensión es preciso conocer una concentración de referencia cerca del lecho o función de incorporación, para lo cual se ha hecho un considerable esfuerzo por obtener dichas fórmulas. Existen varias funciones de incorporación en la bibliografía, pero todas ellas han sido derivadas para condiciones de flujo permanente y uniforme. La bondad de estas relaciones para predecir tasas de incorporación en flujos no permanentes no ha sido demostrada y tampoco se ha intentado desarrollar una formulación general que sea aplicable tanto en condiciones permanentes como no permanentes. El enfoque tradicional relaciona la incorporación de sedimento con el esfuerzo de corte asociado con la fricción de grano en una forma determinística, proveyendo sólo una relación entre valores medios. Una alternativa es considerar el esfuerzo de corte y la incorporación como magnitudes estocásticas turbulentas y expresarlas en términos de sus funciones de densidad de probabilidad (PDF). De esta manera se pueden obtener estadísticos de la incorporación a partir de las PDF del esfuerzo de corte tanto en situaciones de flujos permanentes como no permanentes, dado que el efecto de la impermanencia está implícito en la PDF. Esta nueva metodología fue usada para estimar la incorporación de sedimento debido al paso de embarcaciones en los ríos Mississippi e Illinois. Al usar una expansión en cumulantes de bajo orden para describir la PDF del esfuerzo de corte y una versión generalizada de la relación de incorporación de García y Parker (1991), se obtuvo una expresión para el promedio de la incorporación, en función del promedio, varianza, asimetría y kurtosis del esfuerzo de corte. Los resultados se comparan satisfactoriamente con valores mencionados en la literatura.

Palabras clave: incorporación de sedimentos en suspensión, transporte de sedimentos, navegación, turbulencia, flujo no permanente, mediciones de laboratorio, métodos estocásticos.

Introducción

La metodología que se presenta ha sido motivada por la necesidad de evaluar el impacto producido por el paso de barcas en las vías navegables. Frecuentemente, el tráfico comercial resuspende importantes volúmenes de sedimento del lecho de ríos y canales. Por ejemplo, en la ilustración 1 puede verse la gran cantidad de sedimento incorporado en suspensión (identificable por las zonas claras a los lados y detrás de la embarcación) durante uno de estos eventos. Dependiendo

del tamaño, el sedimento puede redepositarse inmediatamente o permanecer en suspensión y ser transportado por el flujo. Problemas ambientales asociados incluyen la liberación de contaminantes atrapados en el lecho (Erdman *et al.*, 1994), la degradación de áreas de incubación de algunos peces, y la sedimentación en humedales y lagunas afectados por curvas de remanso.

Si se considera una granulometría uniforme y un lecho plano, la ecuación de transporte de sedimentos en suspensión, una vez que ha sido integrada en la vertical, resulta en:

Ilustración 1. Barcazas en un canal de navegación.



$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \frac{\partial UCh}{\partial x} = v_s(E_s - \bar{c}_b) \quad (1)$$

donde C es la concentración media en la vertical, h la profundidad, U la velocidad longitudinal media, v_s la velocidad de caída del sedimento, E_s el flujo ascendente de sedimento y $\bar{c}_b$ la concentración cerca del lecho, promediada sobre la turbulencia. La parte derecha de la ecuación 1 representa el flujo neto ascendente de sedimento desde el lecho y puede interpretarse como el balance entre dos procesos, la resuspensión $v_s E_s$ y la deposición $v_s \bar{c}_b$. Para resolver la ecuación 1, E_s debe ser especificado, por lo que éste es el motivo del considerable esfuerzo dedicado a obtener dicho parámetro a partir de otras características del flujo y propiedades del sedimento (García y Parker, 1991).

En la actualidad, las relaciones disponibles para obtener E_s son del tipo (García y Parker, 1991):

$$E_s = f_1(\tau, D) = f_2(u_*, D) \quad (2)$$

donde τ es el esfuerzo de corte en el lecho, $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$ es la velocidad de corte asociada, ρ es la densidad del fluido y D es una medida del diámetro del sedimento (usualmente D_{50}). Las funciones genéricas f_1 y f_2 son no lineales en τ o u_* , con distintos exponentes, dependiendo de la formulación elegida. Todas estas relaciones han sido derivadas para condiciones de equilibrio, lo cual significa que no se produce erosión o deposición neta. En este caso, la parte derecha de la ecuación 1 se anula y, por lo tanto, $E_s = \bar{c}_b$ (en realidad, es usualmente $\bar{c}_b$ y no E_s la magnitud empleada experimentalmente para obtener f_1 o f_2 bajo condiciones de equilibrio). Esto es inexacto en flujos no permanentes y a

pesar de que algunos investigadores han extendido el uso de este tipo de relaciones a situaciones de no equilibrio (Van Rijn, 1987), su aplicabilidad nunca ha sido demostrada.

El enfoque usado en este trabajo trata de superar los inconvenientes mencionados y obtener una relación general válida tanto para flujos permanentes como impermanentes. El presente análisis reconoce a las variables interactuantes en la ecuación 2 como estocásticas y provee relaciones entre ellas en términos de sus estadísticos (función de densidad de probabilidad y momentos de menor orden), los que, a su vez, son capaces de capturar los efectos asociados con la falta de equilibrio.

Análisis teórico

Introducción

En la presente sección se derivan las ecuaciones correspondientes a los descriptores estadísticos del modelo conceptual. Nótese que los estadísticos de la turbulencia están definidos en términos de valores promediados sobre el ensamble de mediciones. Esto es necesario en el caso de turbulencia no estacionaria, donde la hipótesis de ergodicidad no es aplicable y la muy común simplificación consistente en reemplazar los estadísticos del ensamble por estadísticos en el tiempo no es válida (Bendat y Piersol, 1986). A pesar de que este hecho puede parecer sólo un problema de nomenclatura en las derivaciones, su importancia es fundamental en el diseño de los experimentos necesarios para obtener la información que requiere la nueva metodología.

Enfoque estocástico

El enfoque usual al problema de incorporación de sedimento consiste en tratarlo como una magnitud determinística. Considérese por ejemplo la relación obtenida por García y Parker (1991) con la ayuda de observaciones de laboratorio para condiciones de equilibrio:

$$E_s = \frac{AZ_u^5}{(1 + \frac{A}{0.3} Z_u^5)} \quad (3)$$

donde A es una constante de valor 1.3×10^{-7} y Z_u es una variable de similitud, definida como:

$$Z_u = \frac{u_*}{v_s} R_{ep}^{0.6} \quad (4)$$

El número de Reynolds del sedimento se expresa como:

$$R_{ep} = \frac{\sqrt{gRD_{50}D_{50}}}{\nu} \quad (5)$$

donde g es la aceleración gravitatoria, R es la gravedad específica sumergida, D_{50} es el diámetro medio del sedimento y ν es la viscosidad cinemática del agua.

Una vez que el fluido y el tamaño de sedimento han sido fijados, el flujo de incorporación es solamente función de τ (o alternativamente de u_*), y f_1 y f_2 expresan ahora relaciones biunívocas. En un flujo turbulento, el esfuerzo de corte en el lecho es una variable estocástica y, por ende, también lo es el flujo de incorporación de sedimento en suspensión. Como es habitual con magnitudes turbulentas, los valores instantáneos serán expresados como suma del promedio sobre el ensamble y una fluctuación, o sea $\tau = \langle \tau \rangle + \tau'$, $E_s = \langle E_s \rangle + E_s'$. En este contexto, el valor promedio sobre el ensamble del flujo de incorporación se define como:

$$\langle E_s \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} E_s PDF_E(E_s) dE_s \quad (6)$$

donde PDF_E representa a la función de densidad de probabilidad de E_s . Dado que la ecuación 6 es una relación biunívoca, PDF_E puede expresarse en función de la distribución de probabilidades del esfuerzo de corte PDF_τ :

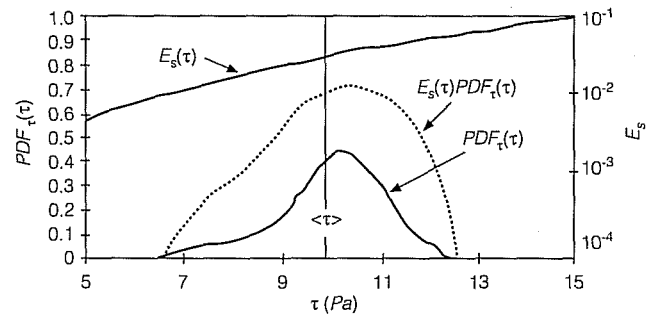
$$PDF_E(E_s) = \frac{PDF_\tau(\tau)}{\left| \frac{dE_s}{d\tau} \right|} \quad (7)$$

cambiando variables en la ecuación 7 y considerando solamente valores positivos de E_s y τ :

$$\langle E_s \rangle = \int_0^{+\infty} E_s(\tau) \frac{PDF_\tau(\tau)}{\left| \frac{dE_s}{d\tau} \right|} \frac{dE_s}{d\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} E_s(\tau) PDF_\tau(\tau) d\tau \quad (8)$$

Gráficamente, la ecuación 8 es el área bajo la curva que resulta de multiplicar E_s y PDF_τ (ilustración 2). El enfoque propuesto permite el cómputo no sólo del valor medio sobre el ensamble, sino también de otros momentos (varianza, asimetría y kurtosis) de la distribución de probabilidades. La información requerida consta de dos funciones de τ : una relación de incorporación (ecuación 3) y una función de densidad de probabilidad del esfuerzo de corte en una forma apropiada para la integración, como la que se muestra a

Ilustración 2. Cálculo de la incorporación de sedimento en suspensión asociada con una distribución de probabilidades de esfuerzo de corte en el fondo.



continuación. Un enfoque similar ha sido usado por Grass y Ayoub (1982) para analizar transporte de fondo en flujos no permanentes.

Distribución de probabilidades del esfuerzo de corte

A pesar de algunas discrepancias concernientes a la forma general de la distribución de probabilidades del esfuerzo de corte en el fondo existe una fuerte evidencia experimental de que, para condiciones estacionarias, ésta se aproxima a una distribución log-normal (Grass, 1970; López 1994). Al ignorar el efecto del número de Reynolds, los parámetros $\tau^+ = \tau'_{rms}/\langle \tau \rangle$, asimetría (S) y kurtosis (F) toman valores típicos próximos a 0.4, 1, y 5, respectivamente (Alfredsson *et al.*, 1988; López, 1994). Llamando N al número de realizaciones del ensamble, los estadísticos se definen de la siguiente forma:

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i \quad \tau'_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tau_i - \langle \tau \rangle)^2} \quad (9)$$

$$S = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tau_i - \langle \tau \rangle)^3}{\tau'_{rms}^3} \quad F = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tau_i - \langle \tau \rangle)^4}{\tau'_{rms}^4}$$

Una expresión general para la distribución de probabilidades del esfuerzo de corte puede obtenerse en función de τ'_{rms} , S y F . En general, cualquier distribución puede expresarse en términos de sus momentos a través de su función característica Φ , definida como (Monin y Yaglom, 1971):

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} PDF(\tau) e^{-i\tau f} d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(if)^i}{i!} M_i \quad (10)$$

donde f es la frecuencia, $j = \sqrt{-1}$ y M_i es el momento de orden i . Sin embargo, este procedimiento requiere el conocimiento de todos los momentos de la distribución, dado que el truncamiento de la serie en la ecuación 10 introduce un error considerable. Esto se debe a que los momentos crecen a medida que su orden aumenta (Monin y Yaglom, 1971). Una alternativa consiste en expandir el logaritmo de $\Phi(f)$, que puede ser expresado en términos de los cumulantes de la distribución, C_i , definidos como:

$$C_i = (-j)^i \frac{\partial^i}{\partial f^i} \ln \Phi(f) \Big|_{f=0} \quad (11)$$

donde $\partial/\partial f^i$ representa la derivada parcial de orden i con respecto a f .

Puede demostrarse (Monin y Yaglom, 1971) que, a diferencia de los momentos, los cumulantes decrecen a medida que el orden aumenta. Esto permite despreciar cumulantes de alto orden y, aún así, obtener una descripción razonable de la distribución de probabilidades.

Al considerar sólo los cumulantes de hasta orden cuatro, Nakagawa y Nezu (1977) obtuvieron la siguiente expresión para la PDF:

$$PDF(\hat{\tau}) = G(\hat{\tau}) \left[1 + \frac{1}{6} C_3 (\hat{\tau}^3 - 3\hat{\tau}) + \frac{1}{24} C_4 (\hat{\tau}^4 - 6\hat{\tau}^2 + 3) \right] \quad (12)$$

donde $\hat{\tau}$ es una variable con media cero y varianza 1, $G(\hat{\tau})$ es la distribución Gaussiana de esta variable y los cumulantes pueden computarse usando:

$$C_3 = S \quad C_4 = F - 3 \quad (13)$$

La distribución $PDF_{\hat{\tau}}(\tau)$ puede obtenerse de la ecuación 12 al usar la siguiente regla de transformación (Bain y Engelhardt, 1987):

$$PDF_{\tau}(\tau) = \frac{PDF_{\hat{\tau}}(\frac{\tau - \langle \tau \rangle}{\tau'_{rms}})}{\left| \frac{d\hat{\tau}}{d\tau} \right|} = \frac{1}{\tau'_{rms}} PDF_{\hat{\tau}}\left(\frac{\tau - \langle \tau \rangle}{\tau'_{rms}}\right) \quad (14)$$

donde $\hat{\tau} = (\tau - \langle \tau \rangle) / \tau'_{rms}$ y subíndices han sido usados para distinguir las dos distribuciones.

Combinando las ecuaciones 12, 13 y 14, la distribución $PDF_{\tau}(\tau)$ puede expresarse como función de la media, desvío estándar, asimetría y kurtosis:

$$PDF_{\tau}(\tau) = \frac{\exp\left(-\frac{(\tau - \langle \tau \rangle)^2}{2\tau'^2_{rms}}\right)}{\tau'_{rms} \sqrt{2\pi}} \left\{ 1 + \frac{S}{6} \left[\left(\frac{\tau - \langle \tau \rangle}{\tau'_{rms}} \right)^3 - 3 \frac{\tau - \langle \tau \rangle}{\tau'_{rms}} \right] + \frac{F-3}{24} \left[\left(\frac{\tau - \langle \tau \rangle}{\tau'_{rms}} \right)^4 - 6 \left(\frac{\tau - \langle \tau \rangle}{\tau'_{rms}} \right)^2 + 3 \right] \right\} \quad (15)$$

Nótese que S y F son iguales tanto para τ como para $\hat{\tau}$. La ecuación presentada permite el cómputo de $PDF_{\tau}(\tau)$ en función de sus primeros cuatro momentos. Se considera que estos estadísticos describen apropiadamente la forma de la distribución de probabilidades, por lo menos para condiciones de flujo permanente o de forma moderada no permanente. Si se usan en la ecuación 15 valores típicos de los parámetros para flujo permanente, la distribución resultante se aproxima a una log-normal (López, 1994).

El análisis presentado es atractivo para la extensión a situaciones de flujo no permanente, dado que en este caso se presume que la distribución de probabilidades cambia y se aparta de la distribución log-normal.

Cómputo de la incorporación de sedimento en suspensión

La derivación de la ecuación 3 se ha basado en observaciones de valores medios y, dado que E_s es una variable estocástica debería ser escrita como:

$$\langle E_s \rangle = A \left(\frac{R_{ep}^{0.6}}{\sqrt{\rho} V_s} \right)^5 \langle \tau \rangle^{5/2} \quad (16)$$

donde el denominador de la ecuación 3 se ha omitido, ya que es un término *ad hoc* que impone un límite superior a E_s (García y Parker, 1991) y puede reemplazarse por la condición $\langle E_s \rangle \leq 0.3$. Asumiendo una relación similar entre los valores instantáneos de τ y E_s , y utilizando las ecuaciones 8 y 15:

$$\langle E_s \rangle = \int_0^{\infty} A \left(\frac{R_{ep}^{0.6}}{\sqrt{\rho} V_s} \right)^5 \tau^{5/2} \frac{1}{\tau'_{rms} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\tau - \langle \tau \rangle)^2}{2\tau'^2_{rms}}} \left\{ 1 + \frac{S}{6} \left[\left(\frac{\tau - \langle \tau \rangle}{\tau'_{rms}} \right)^3 - 3 \frac{\tau - \langle \tau \rangle}{\tau'_{rms}} \right] + \frac{F-3}{24} \left[\left(\frac{\tau - \langle \tau \rangle}{\tau'_{rms}} \right)^4 - 6 \left(\frac{\tau - \langle \tau \rangle}{\tau'_{rms}} \right)^2 + 3 \right] \right\} d\tau \quad (17)$$

La ecuación 17 puede ser integrada analíticamente si se usan polinomios generalizados de Laguerre (Rodríguez, 1998), lo que resulta en:

$$\langle E_s \rangle = \left(\frac{AZ_u^{1.5}}{\sqrt{2\pi}} \right) [I_1 + SJ_1 + (F-3)J_2] \quad (18)$$

donde la siguiente notación ha sido empleada:

$$Z'_u = \frac{\sqrt{\tau'_{rms}/\rho}}{v_s} R_{ep}^{0.6} \quad (19)$$

J_1 y J_2 son funciones de τ^+ solamente, dadas por:

$$\begin{aligned} J_1 &= I_1 \left[-\frac{1}{6\tau^{+3}} + \frac{1}{2\tau^+} \right] + I_2 \left[\frac{1}{2\tau^{+2}} - \frac{1}{2} \right] + I_3 \left[-\frac{1}{2\tau^+} \right] + I_4 \left[\frac{1}{6} \right] \\ J_2 &= I_1 \left[-\frac{1}{24\tau^{+4}} - \frac{1}{4\tau^{+2}} + \frac{1}{8} \right] + I_2 \left[-\frac{1}{6\tau^{+3}} + \frac{1}{2\tau^+} \right] \\ &+ I_3 \left[\frac{1}{4\tau^{+2}} - \frac{1}{4} \right] + I_4 \left[-\frac{1}{6\tau^+} \right] + I_5 \left[\frac{1}{24} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$I_1 \dots I_5$ también son funciones únicamente de τ^+ , definidas por:

$$\begin{aligned} I_1(\tau^+) &= \frac{1.93721 L_{0.75}^{0.5}(-0.5/\tau^{+2})}{\tau^+} + 3.37737 L_{1.25}^{-0.5}(-0.5/\tau^{+2}) \\ I_2(\tau^+) &= \frac{3.37737 L_{1.25}^{-0.5}(-0.5/\tau^{+2})}{\tau^+} + 6.78025 L_{1.75}^{-0.5}(-0.5/\tau^{+2}) \\ I_3(\tau^+) &= \frac{6.78025 L_{1.75}^{-0.5}(-0.5/\tau^{+2})}{\tau^+} + 15.1982 L_{2.25}^{-0.5}(-0.5/\tau^{+2}) \\ I_4(\tau^+) &= \frac{15.1982 L_{2.25}^{-0.5}(-0.5/\tau^{+2})}{\tau^+} + 37.2914 L_{2.75}^{-0.5}(-0.5/\tau^{+2}) \\ I_5(\tau^+) &= \frac{37.2914 L_{2.75}^{-0.5}(-0.5/\tau^{+2})}{\tau^+} + 98.7880 L_{3.25}^{-0.5}(-0.5/\tau^{+2}) \end{aligned} \quad (21)$$

En la ecuación 21 $L_n^a(x)$ denota polinomios generalizados de Laguerre. La ecuación 18 es válida tanto para flujos permanentes como no permanentes, dado que el efecto de la impermanencia está intrínseco en la distribución de probabilidades. Al usar los valores $\tau^+ = 0.4$, $S = 1$ y $F = 5$ (típicos para flujo permanente) en la ecuación 18 resulta:

$$\begin{aligned} \langle E_s \rangle &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{R_{ep}^{0.6}}{\sqrt{\rho} v_s} \right)^5 \langle \tau \rangle^{5/2} \tau^{+5/2} 32.58 \\ &= 1.32A \left(\frac{R_{ep}^{0.6}}{\sqrt{\rho} v_s} \right)^5 \langle \tau \rangle^{5/2} \end{aligned} \quad (22)$$

que es muy próxima a la expresión original de la ecuación 16.

La ecuación 18 requiere de la evaluación de cinco términos $I_1 \dots I_5$ para calcular $\langle E_s \rangle$, lo que limita su aplicabilidad desde un punto de vista práctico. Además, los primeros cuatro momentos de la distribución deben ser estimados, lo cual representa un problema dado que, para un número fijo de observaciones, el error en la estimación de los momentos aumenta con el orden. Es de interés, entonces, explorar el comportamiento de una distribución de probabilidades definida por la menor cantidad de momentos posible. Graficando los valores absolutos de I_1 , J_1 y J_2 en función de τ^+ (ilustración 3) puede apreciarse que J_1 y J_2 son por lo menos un orden de magnitud menor que I_1 para valores de τ^+ mayores que 0.1. En la práctica, τ^+ raramente alcanza valores menores que 0.1, por lo que la contribución de los términos con S y F puede despreciarse convenientemente, lo que resulta en:

$$\langle E_s \rangle = \left(\frac{AZ_u^{1.5}}{\sqrt{2\pi}} \right) I_1 = AZ_u^5 \frac{(\tau^+)^{5/2}}{\sqrt{2\pi}} I_1 \quad (23)$$

que corresponde a una distribución Gaussiana, ya que el mismo resultado podría haberse obtenido usando $S = 0$ y $F = 3$.

Ilustración 3. Gráfica de las funciones $I_1(\tau^+)$, $J_1(\tau^+)$ y $J_2(\tau^+)$.

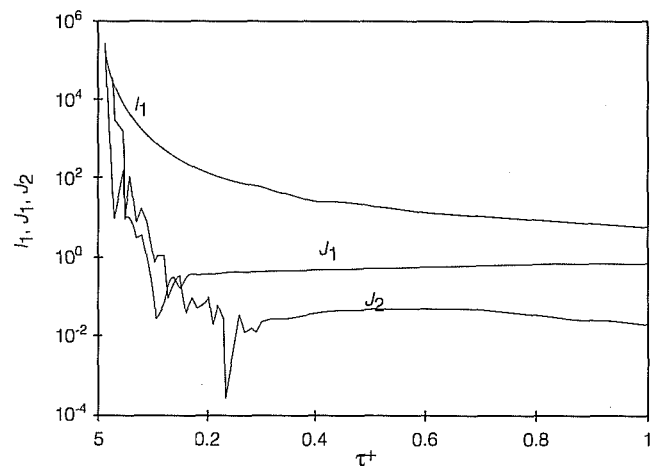
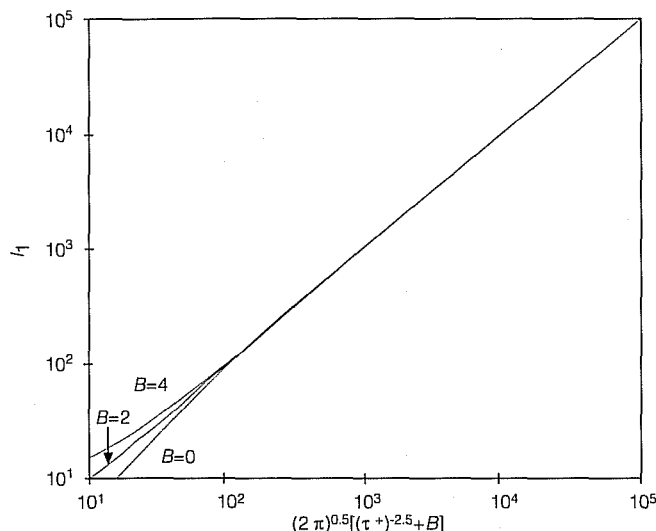


Ilustración 4. Obtención de B . La recta a 45° representa ajuste perfecto a l_1 .



La ecuación 23 indica que $\langle E_s \rangle$ depende de $\langle \tau \rangle$ y de τ'_{rms} o, en otras palabras, del flujo medio y de la turbulencia. Suponiendo que el efecto es aditivo y manteniendo el exponente $5/2$, puede proponerse como alternativa a la ecuación 16:

$$\langle E_s \rangle = A \left(\frac{R_{ep}^{0.6}}{\sqrt{\rho v_s}} \right)^5 \left[\langle \tau \rangle^{5/2} + B(\tau'_{rms})^{5/2} \right] \quad (24)$$

$$= AZ_U^5 [1 + B(\tau^+)^{5/2}]$$

donde B es una constante. De la comparación de las ecuaciones 23 y 24 resulta:

$$l_1 = \sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{(\tau^+)^{5/2}} + B \right] \quad (25)$$

Al usar la ecuación 25 y la expresión de l_1 en la ecuación 21, B puede obtenerse por prueba y error (ilustración 4), con lo que se obtiene $B = 2$. En consecuencia, la ecuación 24 puede escribirse:

$$\langle E_s \rangle = AZ_U^5 + 2AZ_U'^5 \quad (26)$$

que para flujo permanente ($\tau^+ = 0.4$) resulta en:

$$\langle E_s \rangle = 1.2AZ_U^5 \quad (27)$$

la cual es muy similar a la ecuación 22.

Aplicación: cómputo del volumen de sedimento incorporado en suspensión debido al paso de barcazas

Para comparar el enfoque propuesto con el tradicional se usaron datos obtenidos en experimentos de laboratorio. Como ya fue comentado, la construcción del ensamble requiere de numerosas repeticiones del mismo experimento bajo condiciones prácticamente idénticas, lo que lleva a un proceso lento y tedioso. Esto ha motivado el uso de técnicas que en una sola realización separan los componentes de la señal debidos a la no permanencia de los debidos a la turbulencia. Sin embargo, esta metodología está limitada a situaciones en las que la no permanencia es moderada, como en el caso de hidrogramas de crecidas simulados por Song y Graf (1996), y Nezu *et al.* (1997), en los que la separación se realizó mediante filtrado de frecuencias. La no permanencia generada por el paso de barcazas es mucho más violenta y las frecuencias presentes en la señal, producto de la no permanencia, no son claramente discernibles de las provocadas por la turbulencia, resultando inevitable la construcción del ensamble.

Se calcularon valores instantáneos del flujo de incorporación de sedimento en suspensión al utilizar mediciones de esfuerzo de corte en el lecho correspondientes al paso de un tren de 3 (a lo ancho) $\times$ 5 (a lo largo) barcazas (García *et al.*, 1998). Las mediciones se realizaron en un modelo físico en escala 1/25, construido en la Estación Experimental del Cuerpo de Ingenieros del Ejército de los Estados Unidos, ubicada en Vicksburg, Mississippi. Los datos analizados consisten en 53 corridas y fueron obtenidos con sensores de esfuerzo de corte ubicados en el lecho, de forma tal que por sobre ellos pasara el eje de una de las hélices. La situación simulada corresponde a las barcazas que remontan el río. Cada corrida representa una realización del experimento, y pueden calcularse estadísticas sobre el ensamble para cada paso de tiempo. Llevados a escala de prototipo, los valores característicos de la situación simulada corresponden a un flujo con una profundidad de 4.26 m y velocidad de 0.6 m/s, y a una embarcación de 32 m de ancho, 310 m de largo y 2.74 m de calado, moviéndose a una velocidad de 1.5 metros sobre segundos.

Se evaluaron estadísticos básicos ($\langle \tau \rangle$, τ'_{rms} , S , F) y funciones de densidad de probabilidad en algunos puntos característicos. En la ilustración 5 pueden verse las distribuciones de probabilidad medidas, así como las obtenidas con la ecuación 15 y también con la Gaussiana. Como era de esperarse, la asimetría y kurtosis hacen que la distribución de probabilidades se aproxime a una log-normal para condiciones de flujo

Ilustración 5. Función de densidad de probabilidad en distintos instantes.

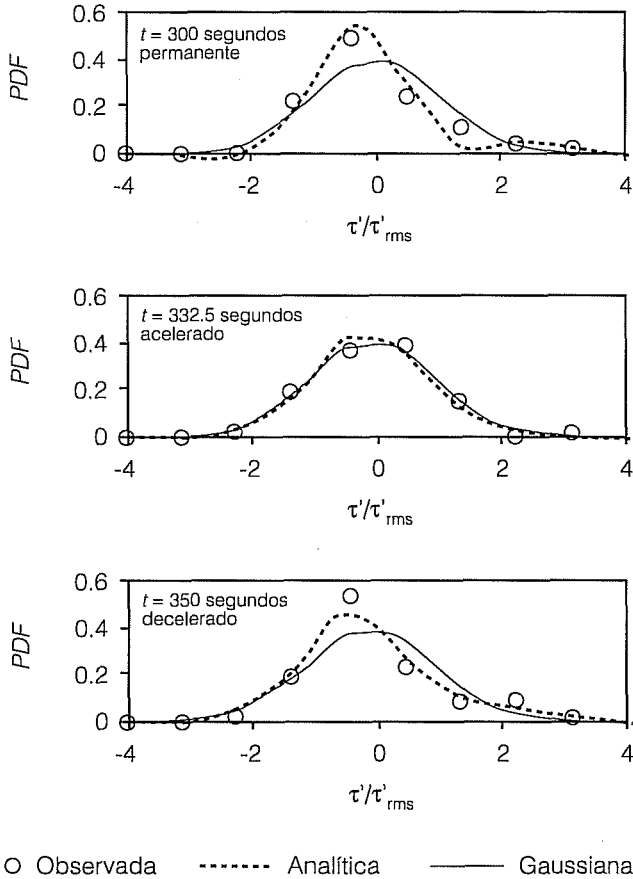


Ilustración 6. Incorporación en suspensión de sedimento de diámetro 0.5 mm en distintos instantes a lo largo del eje de las hélices en función de Z_u .

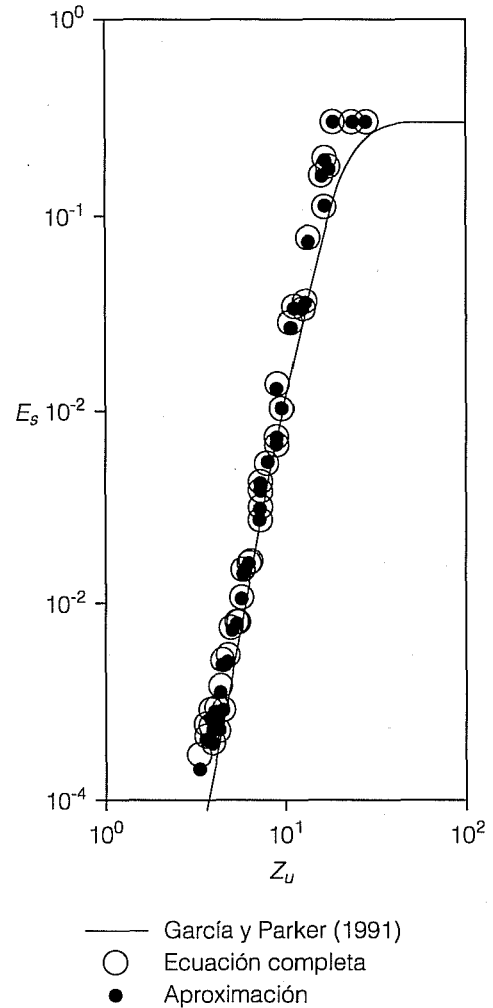
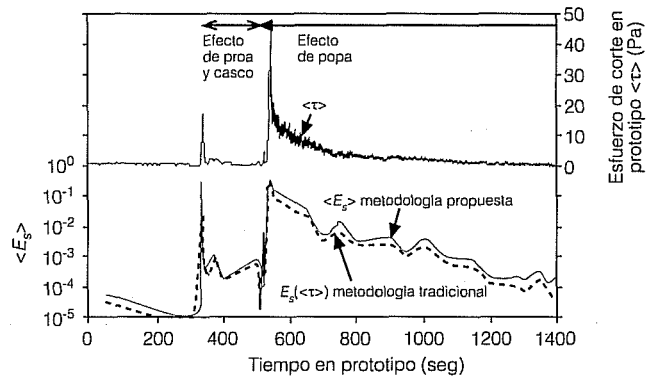


Ilustración 7. Incorporación en suspensión de sedimento de diámetro 0.5 mm a lo largo del eje de las hélices en función del tiempo.



permanente (antes y después del paso de las barcazas), pero la distribución se ve notablemente afectada en las zonas de fuerte impermanencia. También puede apreciarse que la expresión 15 provee una buena aproximación, considerando el limitado número de realizaciones disponible.

El flujo instantáneo de incorporación fue calculado usando la ecuación 18 y la metodología tradicional, esto es, utilizando la ecuación 16. Se seleccionó un tamaño de sedimento de 0.5 mm ($v_s = 7.9$ cm/sec), considerando típico del Alto Mississippi. La ilustración 6 muestra los resultados en el plano Z_u - E_s . El resultado obtenido al usar la ecuación 26 también se incluye en la ilustración y, como puede apreciarse, provee una buena aproximación para la formulación completa. Usando la ecuación 26 se evaluó el flujo instantáneo de incorporación a lo largo del eje de una hélice, el que es presentado en la ilustración 7, junto con el estimado con la metodología tradicional.

El volumen total de sedimento incorporado en suspensión por el paso de las barcas fue obtenido usando la metodología propuesta y algunas hipótesis simplificativas. Para empezar, se adoptó un sistema de referencia Lagrangiano, moviéndose con la embarcación a velocidad constante. De esta manera, la coordenada temporal fue reemplazada por una coordenada longitudinal (x), con origen en el frente de la primera barcaza. La coordenada transversal (y) tiene su origen en el eje de la embarcación. Dado que no existía información sobre el comportamiento de la distribución de probabilidades fuera de la zona de mediciones (eje de una hélice), se asumió que τ^+ , S y F eran constantes en y .

La señal de esfuerzos de corte se analizó separando los efectos de la proa y casco de los de la popa. El efecto del flujo de base en la incorporación en suspensión fue considerado despreciable. Con base en información obtenida durante experimentos complementarios (García *et al.*, 1998), el esfuerzo de corte producido en la zona de proa y casco se consideró constante en la dirección transversal en la región bajo las barcas y nulo fuera de la zona de tránsito. El volumen total de sedimento incorporado por el efecto de la proa y casco resulta de la integración de $\langle E_s(x, y) \rangle v_s$ sobre x e y , como sigue:

$$Q_{\text{proa+casco}} = \int_{-0.5w}^{0.5w} \int_0^{310} \langle E_s \rangle v_s dx dy \quad (28)$$

$$= 0.016w \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0.52 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

donde w es el ancho de la embarcación (32 m), y se consideró que la zona de influencia en x es de 310 metros.

Para la zona de popa, el efecto combinado de las hélices y la estela fue considerado constante en la región central entre hélices, para luego decaer hacia los costados, siguiendo un modelo de difusión bidimensional con un coeficiente de decaimiento obtenido experimentalmente (García *et al.*, 1998), resultando en la siguiente ley para τ :

$$\langle \tau(x, y) \rangle = \langle \tau(x, y_p) \rangle$$

para valores $-y_p < y < y_p$

$$\langle \tau(x, y) \rangle = \langle \tau(x, y_p) \rangle \exp \left[-2000 \frac{(y - y_p)^2}{x^2} \right] \quad (29)$$

para valores $y < -y_p, y > y_p$

$\pm y_p$ denota la posición de los ejes de las hélices, en donde $\langle \tau \rangle = \langle \tau(x, y_p) \rangle$ es máximo. Dado que τ^+ no varía con y , $\tau'_{rms} = \langle \tau \rangle \tau^+$ también obedece la ecuación 29; en consecuencia:

$$\langle E_s(x, y) \rangle = \langle E_s(x, y_p) \rangle$$

para valores $-y_p < y < y_p$

$$\langle E_s(x, y) \rangle = \langle E_s(x, y_p) \rangle \exp \left[-5000 \frac{(y - y_p)^2}{x^2} \right] \quad (30)$$

para valores $y < -y_p, y > y_p$

Nótese que el operador exponencial ha sido elevado a la potencia 5/2 durante la transformación de τ a E_s .

El volumen total incorporado por las hélices es, entonces:

$$Q_{\text{popa}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{310}^{1700} \langle E_s(x, y) \rangle v_s dx dy$$

$$= \int_{310}^{1700} \langle E_s(x, y_p) \rangle v_s 2[y_p + \int_{y_p}^{\infty} \exp \left[-5000 \frac{(y - y_p)^2}{x^2} \right] dy] dx \quad (31)$$

donde se consideró que el efecto de la popa actúa entre $x = 310$ m y $x = 1,700$ m. Haciendo la transformación $y' = y - y_p$, la integración en y resulta:

$$\int_0^{\infty} \exp \left[-5000 \frac{y'^2}{x^2} \right] dy' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{5000}} x \quad (32)$$

reemplazando en la ecuación 31 e integrando numéricamente:

$$Q_{\text{popa}} = 16.6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad (32)$$

El efecto total de la embarcación, Q_t , puede obtenerse al sumar las ecuaciones 28 y 32:

$$Q_t = 0.52 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} + 16.6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 17.1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad (33)$$

Nótese que Q_{popa} es notablemente dominante comparado con $Q_{\text{proa+casco}}$. Esto no es sólo el producto de los mayores valores de $\langle \tau \rangle$ en esta zona, sino también de los mayores niveles de turbulencia generados por las hélices (ilustración 7).

Para el caso de un sistema de referencia Euleriano, el resultado es $11 \text{ m}^3/\text{m}$, expresado en volumen de material por unidad de longitud medida a lo largo del eje del canal.

Cálculos similares usando la fórmula determinística original en la forma de la ecuación 16 predicen un volumen total de $9.42 \text{ m}^3/\text{s}$ y $6.2 \text{ m}^3/\text{m}$, correspondientes a los marcos Lagrangiano y Euleriano, respectivamente. Como puede apreciarse, estos valores son menores que los obtenidos con la metodología estocástica propuesta.

A pesar de que los resultados presentados son aproximados, dan una idea de la enorme cantidad de sedimento resuspendido durante el paso de trenes de barcas. El orden de magnitud de estos resultados concuerda con los reportados por Sutton *et al.* (1996), correspondientes a efectos de maniobras de barcos. Debe remarcarse que la situación considerada corresponde a una embarcación desplazándose hacia aguas arriba y en un cuerpo de agua poco profundo, que es el peor caso en términos de la dinámica del flujo. No obstante, los resultados pueden ser aún más dramáticos si se considera un sedimento más fino, como en el caso del río Illinois, cuyo material de lecho es de aproximadamente 0.1 mm de diámetro. Esto es así no solamente por los mayores volúmenes resuspendidos sino también por el hecho de que este material puede permanecer suspendido en la columna de agua por largo tiempo, a diferencia de lo que ocurre con el de diámetro 0.5 mm , el cual se deposita casi inmediatamente (Admiraal, 1999).

Conclusiones

En condiciones de flujo no permanente, el principal inconveniente de todas las fórmulas de incorporación de sedimento en suspensión es que han sido derivadas para condiciones de equilibrio. El enfoque propuesto reconoce a las variables interactuantes como estocásticas y provee relaciones entre ellas en términos de sus estadísticos, los cuales captan el efecto de la no permanencia. Las mediciones de esfuerzo de corte en el fondo obtenidas durante el paso de un tren de barcas se usaron para calcular volúmenes de sedimento incorporado en suspensión. Del análisis de los resultados se puede concluir:

Con respecto a la distribución de probabilidades del esfuerzo de corte en el lecho, se encontró que una expansión en cumulantes de bajo orden provee una muy buena aproximación a la distribución experimental.

Al usar esta formulación aproximada, junto con una relación de incorporación, puede obtenerse una expresión para $\langle E_s \rangle$ en función de $\langle \tau \rangle$, τ^+ , S y F . Esta

ecuación es válida tanto para condiciones de flujo permanente como no permanente, y la versión para flujo permanente es muy similar a la relación determinística derivada originalmente. Una buena aproximación para la expresión general puede obtenerse despreciando los efectos de S y F .

El comportamiento de la nueva relación muestra que no se aparta tanto de la relación original, por lo que esta última puede usarse como buena aproximación en casos en que no se cuenta con información estadística confiable.

La metodología propuesta fue aplicada al cómputo del volumen de sedimento resuspendido por el paso de barcas y los resultados obtenidos concuerdan con los presentados por otros investigadores.

Agradecimientos

La investigación presentada fue financiada por el Cuerpo de Ingenieros de los Estados Unidos, Estación Experimental de Vías Navegables, a través del proyecto DACW39-96-K-0005.

Recibido: 23/07/1999

Aprobado: 20/03/2000

Referencias

- Admiraal, D.M., *Entrainment of sediment by unsteady turbulent flows*, PhD Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1999.
- Alfredsson, P.H., A.V. Johansson, J.H. Haritonidis y H. Eckelmann, "The fluctuating wall-shear stress and the velocity field in the viscous sublayer", *Phys. Fluids*, vol. 31, núm. 5, 1988, pp. 1026-1033.
- Bain, L.J. y M. Engelhardt, *Introduction to probability and mathematical statistics*, Duxbury Press, 1987.
- Bendat, J.S. y A. G. Piersol, *Random data: analysis and measurement procedures*, Wiley-Interscience Publ., John Wiley & Sons, Nueva York, 1986.
- Erdmann, J.B., H.G. Stefan y P.L. Brezonik, "Analysis of wind and ship-induced sediment resuspension in Duluth-Superior harbor", *Water Resources Bulletin AWRA*, vol. 30, núm. 6, 1994, pp. 1043-1053.
- García, M.H., D.M. Admiraal, J.F. Rodríguez y F. López, *Navigation-induced bed shear stresses: laboratory measurements, data analysis and field applications*, Civil Engrng. Studies, Hydr. Eng. Series núm. 56, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1998.
- García, M.H. y G. Parker, "Entrainment of bed sediment into suspension", *J. Hyd. Eng. ASCE*, vol. 117, núm. 4, 1991, pp. 414-435.

- Grass, A.J., "Initial instability of fine bed sand" *J. Hyd. Div. ASCE*, vol. 96, núm. HY3, 1970, pp. 619-632.
- Grass, A.J. y R.N.M. Ayoub, "Bed load transport of fine sand by laminar and turbulent flow", *Proc. XVIII Coast. Eng. Conf. ASCE*, 1982, pp. 1589-1599.
- López, F., *Near-wall coherent structures and their role on sediment transport in smooth-bed open channel flows*, Ms. Thesis, Univ. Illinois at Urbana-Champaign, 1994.
- Monin, A.S. y A.M. Yaglom, *Statistical fluid mechanics*, vol 1, MIT Press, 1971.
- Nakagawa, H. e I. Nezu, "Prediction of the contribution to the Reynolds stress from bursting events in open-channel flows", *J. Fluid Mech.*, vol. 80, parte 1, 1977, pp. 99-128.
- Nezu, I., A. Kadota y H. Nakagawa, "Turbulence structure in unsteady depth-varying open-channel flows", *J. Hydr. Engrg. ASCE*, vol. 123, núm. 9, 1997, pp. 752-763.
- Rodríguez, J.F., *Wall shear stress in unsteady turbulent flow and its role on sediment transport*, Ms. Thesis, Univ. Illinois at Urbana-Champaign, 1998.
- Song, T. y W.H. Graf, "Velocity and turbulence distribution in unsteady open-channel flows", *J. Hydr. Engrg. ASCE*, vol. 122, núm. 3, 1996, pp. 141-154.
- Sutton, D.W., K. Richter, R. Cheng y P.F. Wang, "Mass loading and subsequent baywide transport of sediment resuspension during tug assisted ship movements at the Naval Station, San Diego. Part I: Field study and deterministic computer model simulation", *Proc. AGU Fall Meeting*, San Francisco, California, 1996.
- Van Rijn, L.C. *Mathematical modeling of morphological processes in the case of sediment transport*, Thesis approved by the Delft University of Technology, Delft Hydr. Communication núm. 382, 1987.

Abstract

Rodríguez, J.F., M.H. García & D.M. Admiraal, "Suspended sediment entrainment estimation in unsteady turbulent flows by means of a stochastic method", *Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish)*, vol. XVI, num. 2, pages 5-15, April-June, 2001.

In order to compute the total amount and vertical distribution of suspended sediment, a reference concentration near the bed or entrainment function is needed, and considerable research effort has been dedicated to obtain such formulae. Several entrainment functions are available in the literature, but all of them have been developed for steady, uniform flow conditions. The ability of such relationships to predict entrainment rates in unsteady flows has not been demonstrated, nor has there been any attempt to develop a general formulation that works for both steady and unsteady flow conditions. The traditional approach relates the entrainment of sediment to the wall shear stress associated with skin friction in a deterministic way, providing only a relation between mean values. An alternative is to consider both the shear stress and the entrainment as stochastic turbulent quantities and to express them in terms of their probability density functions (PDFs). In this way, statistics of the entrainment can be obtained from measured shear stress PDFs, either in steady or unsteady situations, since the effect of unsteadiness is embedded in the PDF. This new methodology was used to estimate sediment entrainment produced by the passage of vessels in the Mississippi River and the Illinois River. Using a low order cumulant expansion to describe the PDF of the shear stress and a generalized version of García and Parker's entrainment relationship, an expression for the average of the entrainment as a function of the average, variance, skewness and flatness of the shear stress distribution was obtained. Predictions compared favorably with values reported in the literature.

Key words: sediment entrainment, sediment transport, navigation, turbulence, unsteady flow, laboratory measurements, stochastic methods.

Dirección institucional de los autores:

José Fernando Rodríguez
Correo electrónico: jfrodrig@uiuc.edu

Marcelo Horacio García
Correo electrónico: mhgarcia@uiuc.edu

Laboratorio de Hidrosistemas, Departamento de Ingeniería Civil
y Ambiental, Universidad de Illinois en Urbana-Champaign
205 North Mathews Avenue Urbana, IL, 61801
Teléfono (217) 244 1796
Fax (217) 333 0687

David Mark Admiraal
Correo electrónico: dadmiraa@unlnotes.unl.edu

Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Nebraska
en Lincoln