

Ecuaciones generales del flujo impermanente en canales de fondo curvo

Gilberto Sotelo Ávila
Carlos A. Escalante Sandoval

Universidad Nacional Autónoma de México

Dressler (1978) publicó las ecuaciones que llevan su nombre para analizar el flujo en canales rectangulares de fondo curvo. Khan y Steffler (1996) propusieron también un procedimiento de análisis basado en ecuaciones promediadas verticalmente y en las del momento de la cantidad de movimiento, las cuales se destinaron también a canales rectangulares de fondo curvo, mediante una solución con un procedimiento numérico más complicado, al manejar un mayor número de ecuaciones. Por otra parte, muchos canales de la práctica son de sección trapecial o circular, y las ecuaciones de Dressler o de Khan y Steffler no son aplicables a dichas formas ni pueden adaptarse fácilmente a ellas. El propósito de este trabajo es presentar una generalización de las ecuaciones del flujo curvilíneo para emplearse en canales de cualquier forma de sección, utilizando para ello un sistema de coordenadas curvilíneas y la hipótesis de flujo poco profundo empleados por Dressler, con el fin de obtener soluciones mediante procedimientos sencillos de integración numérica. El trabajo consta de tres partes principales y aquí se presenta la primera.

Palabras clave: flujo curvilíneo a superficie libre, canales de fondo curvo, ecuaciones del flujo curvilíneo en canales.

Antecedentes

El flujo curvilíneo ocurre con frecuencia en obras que debe diseñar el ingeniero, donde el fondo del canal posee curvatura vertical apreciable, que se mantiene o no constante en grandes distancias y que induce, a su vez, curvaturas importantes en las líneas de flujo. Es el caso de las obras de excedencia a cielo abierto o en túnel, donde es frecuente encontrar deflexiones verticales obligadas por el tipo de obra, por la topografía del terreno o para dirigir el flujo y producir su despegue con el ángulo adecuado en cubetas de lanzamiento.

Aun en estas condiciones, el flujo suele analizarse aceptando que el movimiento sea rectilíneo, es decir, que posea líneas de corriente de escasa o nula curvatura sin importar si el fondo es plano o de curvatura vertical. Con ello se admiten los procedimientos convencionales de análisis, esto es, que existe una distribución hidrostática de la presión en la sección vertical y que hay un solo componente de la velocidad, paralelo a dicho fondo, donde éste es supuestamente plano. Se aplican también conceptos de energía específi-

ca, régimen crítico y pérdida por fricción, basados igualmente en la aceptación del movimiento rectilíneo. Ocasionalmente, algunos tramos del canal con curvatura vertical se tratan como problemas de flujo local con base en teorías especialmente desarrolladas para ello.

Habría que destacar que los modelos convencionales utilizan las ecuaciones del flujo gradual y espacialmente variado, y hasta ecuaciones tan generales como las de Saint-Venant para el flujo no permanente, pero su aplicación a canales de fondo curvo viola las reales condiciones en que se desarrolla. En efecto, el fondo curvo ejerce una influencia importante en la forma de la trayectoria de las partículas en cada punto del campo de flujo, al grado que adoptan curvaturas variables que modifican la distribución de la velocidad y de la presión respecto a la observada en un movimiento rectilíneo. Esto es, la creación de aceleraciones importantes normales a las trayectorias da lugar a fuerzas también normales que apartan bastante la distribución de la presión en el seno del flujo respecto de la hidrostática. Con ello se modifica su comportamiento y se ve la

necesidad de conocer mejor las condiciones reales en que el flujo se produce, además de disponer de un método de análisis basado en ecuaciones con términos que contengan no sólo la inclinación longitudinal del fondo, sino también su curvatura.

Dressler (1978) fue el primero que desarrolló un modelo de flujo basado en la curvatura del fondo del canal. Para ello transformó las ecuaciones diferenciales básicas del flujo bidimensional irrotacional en coordenadas cartesianas a la forma que adoptan cuando se emplea un sistema de coordenadas curvilíneas. Para efectuar la integración aceptó la hipótesis de que el flujo era poco profundo (somero), pero con una solución aplicable únicamente a canales rectangulares, como son muchos de los que se diseñan en la práctica, pero que no puede usarse con otras formas de sección. Dressler *et al.* (1984) incluyeron después el efecto resistivo en los desarrollos, pero en forma errónea. Posteriormente, Sotelo *et al.* (1994) llegaron a las mismas ecuaciones de Dressler sin fricción para el canal rectangular, siguiendo caminos diferentes, pero más sencillos, aunque en ciertos aspectos, incompletos.

En una publicación más reciente, Khan y Steffler (1996) presentaron un análisis basado en ecuaciones diferenciales con variables promediadas verticalmente y en ecuaciones del momento de la cantidad de movimiento para el fondo curvo, incluyendo el efecto de fricción. Sin embargo, su modelo es también aplicable sólo a canales rectangulares y tiene la desventaja de utilizar ocho ecuaciones diferenciales, a diferencia de dos que se usan en el modelo de Dressler. Para ello, el modelo de Khan y Steffler utiliza métodos numéricos más avanzados, con procedimientos que son de momento menos accesibles para el ingeniero. Por otra parte, utiliza un sistema coordenado x (horizontal), y (vertical), que no ofrece ventajas para definir la geometría de la sección del canal, principalmente cuando, por ejemplo, se diseña una obra de excedencias en un túnel de gran pendiente y transiciones de geometría complicada.

Objetivo y alcances

El propósito de este trabajo consiste precisamente en establecer un modelo para el análisis del flujo curvilíneo en un canal, con el que se generaliza el análisis para cualquier forma de la sección y geometría del fondo curvo (cóncavo o convexo), y se subsanan las deficiencias que tienen los métodos convencionales basados en el flujo rectilíneo.

La exposición del trabajo tuvo que hacerse en tres partes debido a su extensión. En esta primera parte se presentan los aspectos generales del modelo y se es-

tablecen las ecuaciones básicas exactas para el flujo no permanente, partiendo de las ecuaciones de transporte de Reynolds. Dichas ecuaciones básicas se simplifican cuando se acepta la condición de flujo poco profundo y se obtiene un sistema no menos preciso si se cumple dicha condición, pero factible de resolver aun en flujo no permanente. Cuando el canal es rectangular, las ecuaciones generales se convierten en las de Dressler como caso particular de las primeras. Igualmente, cuando la curvatura se hace igual a cero, las ecuaciones obtenidas se convierten en las convencionales para el canal de fondo plano y flujo rectilíneo.

En la segunda parte se evalúa el efecto resistivo en las fronteras mojadas de un flujo cóncavo o convexo, de modo que sea congruente con las leyes de fricción en el canal de fondo plano. En la tercera parte se obtienen las expresiones particulares para los canales trapecial, rectangular y triangular.

Coordenadas curvilíneas

Características del canal

Se considera un canal cuyo eje y centro de curvatura se alojan sobre un plano vertical, para eliminar cualquier curvatura horizontal, pero cuya sección transversal puede tener cualquier forma. El efecto del fondo curvo se produce sobre planos verticales paralelos a los que contiene dicho eje y a los centros de curvatura (ilustración 1), lo que elimina al flujo curvilíneo creado por otras razones; por ejemplo, el que ocurre antes y después del cambio brusco de la pendiente longitudinal en un canal de fondo plano.

En el análisis se acepta que el flujo en el canal sea incompresible (dado que es a superficie libre), irrotacional, no viscoso y con fricción. Para ello existe un sistema convencional de ecuaciones diferenciales referido al sistema fijo de coordenadas cartesianas (x , y , z) que se muestra en la ilustración 1, siendo x el eje horizontal que sirve, a su vez, como nivel arbitrario de referencia; y un eje también horizontal, y z el eje vertical. Sobre ellos se alojan los vectores unitarios i , j , k , respectivamente.

La curvatura del fondo es la que tiene el canal sobre su eje y define el centro de curvatura de la sección, el cual mantiene la misma posición en dirección transversal. Cuando la curvatura cambia en la dirección del eje del canal, lo hace de manera continua. El flujo curvilíneo es el resultado del efecto que produce dicha curvatura a través del componente de la aceleración normal a las líneas de flujo sobre planos verticales (paralelos al plano $x-z$), sin existir componente del movimiento en la dirección transversal ($v_y = a_y = 0$).

Para facilitar el análisis se utiliza un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales en el espacio (s, c, n), similar al adoptado por Dressler (1978), pero con las modificaciones necesarias para tomar en cuenta la forma de la sección transversal del canal en dirección transversal al movimiento. Como se muestra en la ilustración 1, la coordenada s del sistema sigue fielmente la forma conocida del fondo curvo y mide la longitud de arco de dicho fondo. Define también la posición de un plano orthogonal al fondo en cada punto B sobre el eje, el cual contiene la sección transversal del canal y sobre él se mide la coordenada n . No habiendo cambio en dirección lateral sobre dicho plano, la coordenada c es de igual magnitud y dirección que y , por tanto, el sistema curvilíneo es realmente s, y, n , y poco difiere del que se emplea para el flujo unidimensional sobre un fondo plano.

Un punto B en el fondo se localiza mediante las coordenadas ($x = \xi, y = 0, z = \zeta$). De este modo, la curva continua en el espacio que sigue el fondo se define a través de las funciones (sólo de s): $x = \xi(s)$; $y = 0$; $z = \zeta(s)$; siendo necesario que la curvatura y la pendiente sean también continuas. La coordenada n de un punto P en el campo de flujo se establece desde el punto B en dirección orthogonal al fondo hasta el nivel del punto en cuestión. Finalmente, la coordenada y ubica al punto P . El perfil de la superficie libre se desconoce, pero se representa por $n = d(s, t)$, donde d es la distancia orthogonal desde el fondo hasta la superficie li-

Ilustración 1. Definición del sistema de coordenadas curvilíneas.

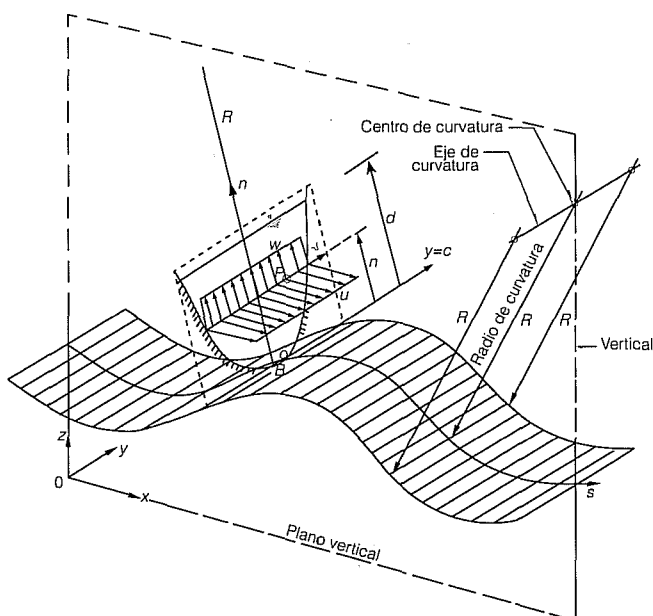
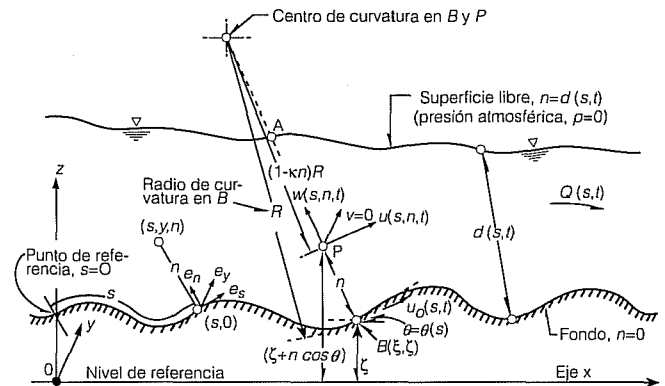


Ilustración 2. Definición de variables en un flujo curvilíneo.



bre (según n) y es también función de s y la variable t (tiempo).

Las nuevas variables independientes (s, y, n) forman un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, como se muestra en la ilustración 2, de donde es fácil deducir que las ecuaciones de transformación entre los dos sistemas coordenados para un punto P cualquiera son:

$$x(s, n) = \xi - \zeta' n \quad (1)$$

$$y = y \quad (2)$$

$$z(s, n) = \zeta + \xi' n \quad (3)$$

donde los términos:

$$\xi'(s) = \frac{\partial \xi}{\partial s} = \cos \theta \quad (4)$$

$$\zeta'(s) = \frac{\partial \zeta}{\partial s} = -\sin \theta \quad (5)$$

son desde luego funciones sólo de s , siendo θ el ángulo de inclinación de la tangente al fondo en el punto B respecto de la horizontal. Por supuesto, se cumple la identidad $(\xi')^2 + (\zeta')^2 = 1$.

Vectores base y jacobiano de la transformación

Los vectores unitarios base e_s, e_y, e_n son tangentes a las líneas que siguen las coordenadas s, y, n y también ortogonales entre sí (ilustración 2). Dichos vectores se definen en principio en cada punto P y, por tanto, son funciones de s, y, n . Los vectores unitarios (i, j, k), según x, y, z son en cambio fijos, cualquiera que sea el punto en cuestión.

El vector de posición del punto P es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, de manera que los vectores unitarios en dicho punto son:

$$\mathbf{e}_s = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right| \quad (6a)$$

$$\mathbf{e}_y = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right| \quad (6b)$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n} \right| \quad (6c)$$

donde los denominadores se conocen como factores de escala. Haciendo: $\xi'' = \partial \xi' / \partial s$; $\zeta'' = \partial \zeta' / \partial s$; de las ecuaciones 1, 2 y 3 resultan los numeradores:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, n) = (\xi' - \zeta'' n) \mathbf{i} + (\zeta' + \xi'' n) \mathbf{k} \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} \quad (7b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n}(s, n) = -\zeta' \mathbf{i} + \xi' \mathbf{k} \quad (7c)$$

Los vectores base se definen mejor en el fondo ($n = 0$) a partir de las ecuaciones 6 y 7, de modo que sean función sólo de s (excepto el segundo que es fijo), es decir:

$$\mathbf{e}_s(s) = \xi' \mathbf{i} + \zeta' \mathbf{k} \quad (8a)$$

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{j} \quad (8b)$$

$$\mathbf{e}_n(s) = -\zeta' \mathbf{i} + \xi' \mathbf{k} \quad (8c)$$

ya que para $n = 0$, de las ecuaciones 7a, 7b y 7c, los factores de escala son iguales a uno. De acuerdo con las ecuaciones de Frenet-Serret, para el punto B en el fondo se cumple:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial s} = \kappa \mathbf{e}_n \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial s} = \tau \mathbf{e}_n = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial s} = -\kappa \mathbf{e}_s - \tau \mathbf{e}_y = -\kappa \mathbf{e}_s \quad (11)$$

ya que la torsión es $\tau = 0$, en virtud de que el eje y sigue una línea recta, siendo $\kappa(s) = 1/R(s)$ la curvatura del fondo en el punto B , definida como el recíproco del radio de curvatura R en dicho punto (ilustración 2) y función sólo de s . El valor $\kappa > 0$ describe un fondo cóncavo y el de $\kappa < 0$, al convexo.

De la ecuación 8a se obtiene el vector:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial s} = \xi'' \mathbf{i} + \zeta'' \mathbf{k} \quad (12)$$

el cual es perpendicular a $\mathbf{e}_s$ y colineal con $\mathbf{n}$. De la ecuación 9 se cumple que:

$$\kappa^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial s} \right|^2 = (\xi'')^2 + (\zeta'')^2 \quad (13)$$

ya que $|\mathbf{e}_n| = 1$. Según las reglas del producto escalar, también se cumple que: $\mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial s} = \mathbf{e}_n \cdot \kappa \mathbf{e}_n = \kappa$, ya que $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = 1$; por tanto, de las ecuaciones 8c y 12, la curvatura resulta:

$$\kappa = \xi' \zeta'' - \zeta' \xi'' \quad (14)$$

Para que las ecuaciones 1, 2 y 3 sean de transformación entre los dos sistemas coordenados, es necesario y suficiente que el jacobiano de la transformación sea distinto de cero, en cuyo caso deben existir ecuaciones similares para la transformación recíproca. Si se considera que: $\partial x / \partial y = \partial y / \partial s = \partial y / \partial n = \partial z / \partial y = 0$, el jacobiano de la transformación se expresa como sigue:

$$J \begin{pmatrix} x, y, z \\ s, y, n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial n} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial n} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$J \begin{pmatrix} x, y, z \\ s, y, n \end{pmatrix} = (\xi' - \zeta'' n) \xi' + \zeta' (\zeta' + \xi'' n) = (\xi')^2 + (\zeta')^2 - (\xi' \zeta'' - \zeta' \xi'') n$$

donde las derivadas parciales se obtuvieron de las ecuaciones de transformación 1, 2 y 3. A partir de las ecuaciones 4 y 5, la suma de los dos primeros términos en la anterior vale uno y con la ecuación 14, el jacobiano se reduce a la forma:

$$J \left(\frac{x, y, z}{s, y, n} \right) = 1 - \kappa n \quad (15)$$

Es decir, $J(s, y, n) \neq 0$ y el mapeo es posible uno a uno siempre que para $\kappa > 0$, $n \leq 1/\kappa = R$, lo que es obvio geoméricamente; el caso de $J(s, y, n) = 0$ haría que el mapeo dejara de ser uno a uno.

El valor máximo de κn es para $n = d$, y la condición anterior restringe la dimensión d en todos los flujos donde $\kappa > 0$ a que $\kappa d < 1$. Por razones obvias, es también $J(s, y, n) \neq 0$ cuando $\kappa < 0$.

El factor de escala en la ecuación 6a es la magnitud del vector expresado por la ecuación 7a, de manera que, al desarrollar los binomios, agrupar términos y utilizar las ecuaciones 13 y 14, resulta:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right| = \left[1 - 2\kappa n + \kappa^2 n^2 \right]^{1/2} = \left[(1 - \kappa n)^2 \right]^{1/2} = J \quad (16)$$

es decir, el factor de escala según s es el jacobiano de la transformación. Por el mismo camino, de las ecuaciones 7b y 7c los factores de escala restantes son: $|\partial \mathbf{r} / \partial y| = |\partial \mathbf{r} / \partial n| = 1$. Esto significa que un incremento ds a partir del punto B equivale al incremento diferencial $J ds$ a partir del punto P y que los incrementos dy y dn en B son los mismos que en P . Es decir, el jacobiano es el factor de escala para s y el valor 1 lo es para y y n .

De este modo, el incremento diferencial de arco ($ds + dy + dn$) en B equivale al incremento diferencial de arco en el punto P , de valor: $da = \sqrt{(J ds)^2 + (dy)^2 + (dn)^2}$.

En la misma forma, las diferenciales de área y de volumen en coordenadas (s, y, n) están dadas por: $dA = J ds dn$; $dv = J ds dy dn$.

Dado el vector de posición del punto P por sus componentes según x, y, z , a través de las ecuaciones 1, 2 y 3, los vectores unitarios base en las expresiones 6a, 6b y 6c son entonces:

$$\mathbf{e}_s = \frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \quad (17a)$$

$$\mathbf{e}_y = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} \quad (17b)$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n} \quad (17c)$$

Para la transformación inversa, esto es del sistema curvilíneo (s, y, n) al sistema cartesiano (x, y, z) , se dispone del vector:

$\nabla s = (\partial s / \partial x) \mathbf{i} + (\partial s / \partial y) \mathbf{j} + (\partial s / \partial z) \mathbf{k}$, y de los vectores similares: ∇y y ∇n .

Se demuestra entonces que los vectores base se definen como sigue:

$$\mathbf{e}_s = \frac{\nabla s}{|\nabla s|} = J \nabla s \quad (18a)$$

$$\mathbf{e}_y = \frac{\nabla y}{|\nabla y|} = \nabla y \quad (18b)$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{\nabla n}{|\nabla n|} = \nabla n \quad (18c)$$

Esto significa que los factores de escala para transformar el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales elegido al cartesiano (x, y, z) son los recíprocos de los antes encontrados: $|\nabla s| = 1/J$; $|\nabla y| = 1$; $|\nabla n| = 1$.

El gradiente, la divergencia y el rotacional en coordenadas curvilíneas

Sea $\phi = \phi(s, y, n)$ una función escalar diferenciable y las ecuaciones 1, 2 y 3 las de transformación del sistema coordinado curvilíneo ortogonal, el gradiente de ϕ en el sistema curvilíneo resulta:

$$\nabla \phi = \frac{1}{J} \frac{\partial \phi}{\partial s} \mathbf{e}_s + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathbf{e}_n \quad (19)$$

Sea el vector:

$$\phi = \phi_1(s, y, n) \mathbf{e}_s + \phi_2(s, y, n) \mathbf{e}_y + \phi_3(s, y, n) \mathbf{e}_n \quad (20)$$

una función vectorial diferenciable en el sistema curvilíneo de vectores base $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_n$. Se demuestra que la divergencia de dicho vector en coordenadas curvilíneas, cuando J no depende de y , es:

$$\nabla \cdot \phi = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial s} + \frac{\partial J \phi_3}{\partial n} \right] + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad (21)$$

El rotacional del mismo vector ϕ en el sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas elegido está dado por el determinante:

$$\nabla \times \phi = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} J \mathbf{e}_s & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_n \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial n} \\ J \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{vmatrix} \quad (22)$$

Componentes de la velocidad

El plano que contiene las coordenadas (y, n) es ciertamente ortogonal al fondo del canal en cualquier punto de la coordenada s , pero la trayectoria de las partículas que pasan por cualquier punto $P(s, y, n)$ en el campo de flujo (ilustración 2) no es necesariamente ortogonal a la dirección n en que se ubica dicho punto. Esto significa que el vector velocidad en el punto P tiene por lo menos los componentes u y w ; el primero es perpendicular al plano que contiene las coordenadas (y, n) y el segundo está en la dirección de n . El tercer componente es $v = v_y = 0$, lo que significa que el movimiento se realiza exclusivamente sobre los planos paralelos al $(x - z)$ en que ocurre la curvatura, con las correcciones del caso, tal como se consideró en las hipótesis de partida. El vector velocidad en cada sistema coordenado queda entonces expresado en la forma:

$$\mathbf{v}(s, n, t) = v_x \mathbf{i} + v_z \mathbf{k} = u \mathbf{e}_s + w \mathbf{e}_n \quad (23)$$

De las ecuaciones 4, 5, 8a y 8c se tienen las relaciones:

$$v_x = u \cos \theta - w \sin \theta; v_y = v = 0; \\ v_z = u \sin \theta + w \cos \theta$$

De acuerdo con las consideraciones del inciso anterior y lo expresado por la ecuación 16, los componentes únicos de la velocidad según s y n son:

$$u(s, n, t) = J(s, n) \frac{ds}{dt} \quad (24a)$$

$$w(s, n, t) = \frac{dn}{dt} \quad (24b)$$

Componentes de la aceleración

La forma vectorial general de la aceleración en cualquier sistema de coordenadas es

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (25)$$

donde v es la magnitud del vector velocidad, es decir, $v^2 = u^2 + w^2$. Al efectuar el desarrollo de los operadores en la ecuación anterior, se demuestra que el vector aceleración en el sistema de coordenadas (s, y, n) elegido es:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{u}{J} \frac{\partial u}{\partial s} + w \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\kappa}{J} u w + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \mathbf{e}_s \\ + \left(\frac{\kappa}{J} u^2 + \frac{u}{J} \frac{\partial w}{\partial s} + w \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \mathbf{e}_n \quad (26)$$

Esta expresión muestra que en cualquier instante t , el vector aceleración en todos los puntos del campo de flujo tiene únicamente dos componentes: uno en la dirección del vector $\mathbf{e}_s$ y otro en la dirección de $\mathbf{e}_n$, sin existir componente en la dirección y .

Ecuaciones diferenciales del flujo irrotacional

Aspectos generales

El flujo definido anteriormente ocurre en forma de capas delgadas de líquido, como se muestra en la ilustración 3a. Se designa por B a la dimensión horizontal que tiene la sección del canal a la distancia n , como se muestra en la ilustración 1, la cual es un escalar que depende sólo de n . Cuando la sección del canal cambia además en el sentido longitudinal se complica mucho su geometría para fines constructivos y prefiere evitarse. Sin embargo, es necesaria en túneles, donde la sección se define más fácilmente en dirección perpendicular al fondo, eligiendo cambios graduales en el sentido longitudinal por las grandes velocidades que adquiere el agua. Esto significa que el modelo debe aceptar cambios de B con s y n , de la misma manera que varían los componentes de la velocidad u y w , pero los que ocurran con s deben ser graduales para no modificar las condiciones de curvatura, es decir, para no introducir el tercer componente de la velocidad v en dirección transversal (según y). Por tanto, en algunos casos, B se puede unir con los componentes de la velocidad y formar nuevas funciones, como Bu y Bw , para simplificar los desarrollos.

Con las consideraciones y desarrollos antes expuestos es posible establecer las ecuaciones diferenciales del flujo, suponiendo un líquido no viscoso, como se hace en el modelo de Saint-Venant, pero introduciendo desde aquí la fuerza de resistencia por fricción en las fronteras rígidas sin perder rigor ni precisión en los resultados. Así, se prefiere el desarrollo completo de las ecuaciones a partir de los principios básicos, en lugar de transformar las ecuaciones de continuidad y de Euler al sistema de coordenadas elegido.

Condición de irrotacionalidad

De la ecuación 22 y con: $\phi_1 = u$; $\phi_2 = v$; $\phi_3 = w$; $\partial w/\partial y = \partial Ju/\partial y = 0$, se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\frac{1}{J} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial Ju}{\partial n} \right) \mathbf{e}_y \quad (27)$$

Haciendo $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ resulta la condición buscada:

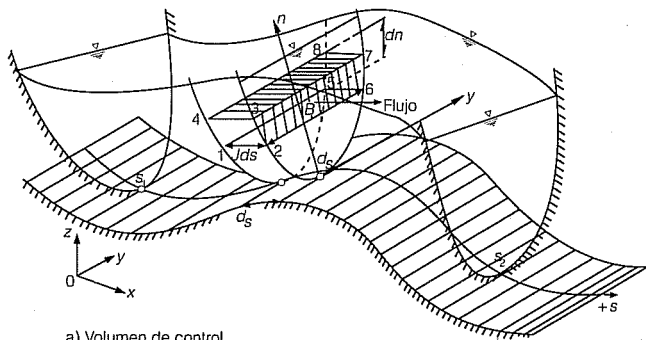
$$\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial Ju}{\partial n} = 0 \quad (28)$$

Ecuación de continuidad

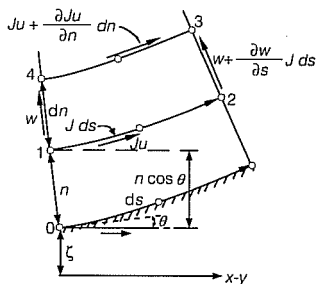
El volumen de control de la ilustración 3b se utiliza para obtener la ecuación de continuidad, como aparece en las ilustraciones 3a y 3c, donde se representan sus dimensiones y los componentes de la velocidad útiles en la derivación. A dicho volumen de control se aplica la ecuación de transporte de Reynolds para la masa, que está dada por:

$$\iint_{SC} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho dv = 0$$

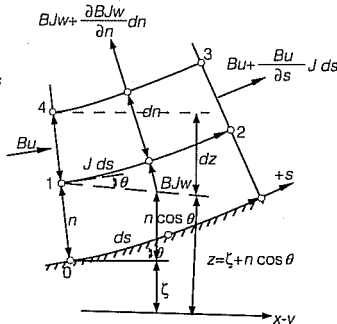
Ilustración 3. Derivación de las ecuaciones básicas.



a) Volumen de control



b) Irrotacionalidad



c) Continuidad

La masa neta de líquido que entra y sale del VC es la suma:

$$\Sigma m = \rho \left[Bu + \frac{\partial Bu}{\partial s} J ds \right] dn - \rho Bu dn + \rho \left[BJw + \frac{\partial BJw}{\partial n} dn \right] J ds - \rho BJw J ds$$

$$\iint_{SC} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA) = \iint_{SC} \left[\frac{\partial Bu}{\partial s} + \frac{\partial BJw}{\partial n} \right] \rho J ds dn$$

La variación de la masa dentro del VC en el tiempo (dt) es: $\rho \frac{\partial}{\partial t} (BJ ds dn)$, pero dado que BJ , ds y dn no dependen de t , el principio de conservación de la masa se expresa entonces mediante la ecuación:

$$\frac{\partial Bu}{\partial s} + \frac{\partial BJw}{\partial n} = 0 \quad (29)$$

la cual también se obtiene de la ecuación 21, haciendo: $\phi_1 = Bu$; $\phi_2 = 0$; $\phi_3 = Bw$, de modo que $\nabla \cdot B\mathbf{v} = 0$.

Cuando B no cambia con s , $\partial B/\partial s = 0$ en la ecuación anterior, y cuando B tampoco cambia con n (sección rectangular), $\partial B/\partial n = 0$.

Ecuación de movimiento

a) Ecuación vectorial

Antes de establecer la ecuación de movimiento es necesario precisar el criterio para insertar, desde un principio, el efecto resistivo en ella. Los modelos de flujo convencionales, como el de Saint-Venant, excluyen inicialmente la resistencia ocasionada por fuerzas friccionantes y viscosidad turbulenta ejercida por el fondo y las paredes. El efecto conjunto retardatorio se introduce después mediante el artificio de calcular los esfuerzos tangenciales sobre las fronteras, distribuyendo la fuerza resultante que producen sobre cada capa de líquido desde el fondo hasta la superficie libre. De esta manera, aunque el dominio del líquido así considerado corresponde a un volumen de control de gran tamaño, las ecuaciones diferenciales que gobiernan describen el flujo de una partícula de masa dm de *pequeño tamaño* con el mismo rigor. En el caso presente, la resistencia se inserta simultáneamente como una fuerza separada con la magnitud deducida de un análisis adecuado al tipo de flujo, como se explica en el siguiente artículo de los mismos autores: *Efecto resistivo en las ecuaciones generales del flujo impermanente en cana-*

les de fondo curvo, para publicarse en esta misma revista.

Quando se aplica la ecuación de transporte de Reynolds al principio de conservación de la cantidad de movimiento en el volumen de control de la ilustración 4, se obtiene:

$$F_t = \iiint_{VC} \frac{D}{Dt} (\rho v) \, d\omega = \iint_{SC} (\rho v \cdot n \, dA) + \iiint_{VC} \frac{\partial v}{\partial t} \rho \, d\omega \quad (30)$$

donde F_t es la resultante del conjunto de fuerzas de superficie (externas) y de las fuerzas de cuerpo actuando sobre la masa elemental. El símbolo D/Dt se interpreta como la derivada total de Stokes del producto de las variables que afecta dentro del volumen de control. Por otra parte, en los libros de matemáticas se demuestra que la expresión anterior se convierte en:

$$F. + F_f = \iiint_{VC} \frac{Dv}{Dt} \rho \, dv \quad (31)$$

donde se ha subdividido a $\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_* + \mathbf{F}_f$, siendo $\mathbf{F}_*$ la resultante de las fuerzas de cuerpo que actúan sobre la masa elemental y de las fuerzas externas que sean distintas de la fricción, ya que $\mathbf{F}_f$ es precisamente la fuerza de fricción que actúa a su vez en dirección tangencial a las fronteras mojadas y se opone al flujo. La ecuación 31 es una expresión de la segunda ley de Newton.

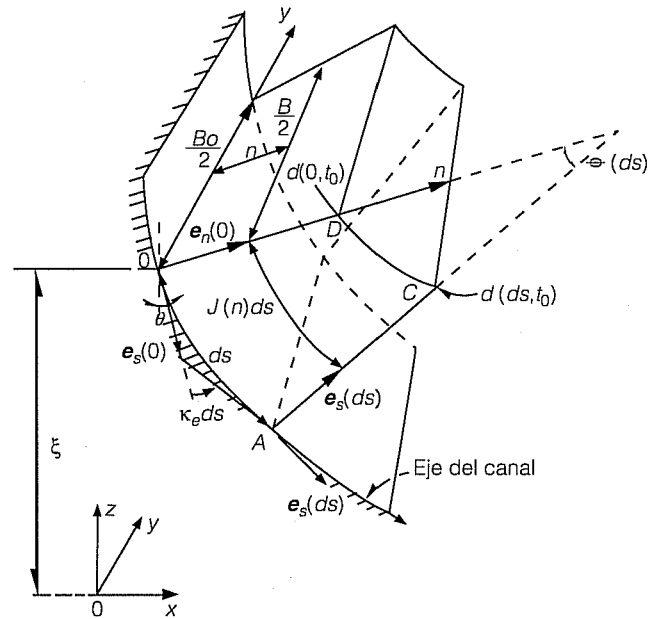
Como se mencionó, las fuerzas $\mathbf{F}$ se subdividen en fuerzas de cuerpo $\mathbf{F}_c$ por unidad de masa y en fuerzas de superficie $\mathbf{F}_A$ por unidad de área. Las fuerzas $\mathbf{F}_c$ se deben a la acción de campos magnéticos y gravitacionales que actúan sobre la masa contenida en el volumen de control. Las fuerzas $\mathbf{F}_A$ agrupan las fuerzas normales a la superficie de control producidas por la presión p y a las fuerzas tangenciales a dicha superficie generadas por los esfuerzos cortantes atribuidos a la viscosidad del agua que no se considerarán. Por tanto, se tiene:

$$\mathbf{F}_c = \iiint_{VC} \rho \mathbf{F}_c \, dv + \iint_{SC} \mathbf{F}_A \mathbf{n} \, dA = \iiint_{VC} \rho \mathbf{F}_c \, dv - \iint_{SC} \mathbf{n} p \, dA$$

Se considera únicamente el campo gravitacional, de modo que $\mathbf{F}_c = \nabla \Omega$, donde $\Omega = -g z$ es la función potencial de dicho campo. Además, la integral de superficie se transforma en integral de volumen mediante el teorema de Gauss: $\mathbf{F}_c = \iiint_{V_C} (\rho \nabla \Omega - \nabla p) d\mathbf{v}$, el cual se sustituye en la ecuación 31 y se obtiene:

$$\iiint_{VC} \left[\nabla \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{dv}{dt} \right] \rho \, dv = \mathbf{F}_f$$

Ilustración 4. Volumen de control al obtener la fuerza de resistencia al flujo.



Por razones geométricas, la elevación del volumen diferencial se calcula como: $z = \zeta + n \cos \theta$. Además, el vector aceleración se expresa mediante la ecuación 25, donde se acepta la condición de irrotacionalidad ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$); por tanto, la ecuación anterior se convierte en:

$$\iiint_{VC} \left[\nabla \left(g \zeta + g n \cos \theta + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + w^2}{2} \right) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right] \rho \, d\mathbf{v} = \mathbf{F}_f \quad (32)$$

El término:

$$H(s, n, t) = \zeta + n \cos \theta + \frac{p}{gp} + \frac{u^2 + w^2}{2g} \quad (33)$$

es la energía total (por unidad de peso) de la capa diferencial de líquido, de modo que la ecuación 32 también es:

$$\iiint_{VC} \left[\nabla gH + \frac{\partial v}{\partial t} \right] \rho \, dv = \mathbf{F}_f \quad (34)$$

donde $\mathbf{F}_f$ es la fuerza de resistencia al flujo producida en la frontera mojada en dirección contraria al movimiento. Cuando $\mathbf{F}_f = 0$ resulta la forma vectorial de la ecuación de Euler:

$$\nabla gH + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (35)$$

b) Componentes de la ecuación de movimiento

Los componentes de la ecuación 34 corresponden a las direcciones coordenadas s y n . Los vectores base son función sólo de s , quedando definidos en cualquier punto del fondo mediante las ecuaciones 8. En particular, los que corresponden al punto 0 ($s = 0$) de la ilustración 4 en el instante $t = 0$ son $\mathbf{e}_s(0)$ y $\mathbf{e}_n(0)$. Por tanto, para obtener el componente según s en $s = 0$ se toma el producto escalar de $\mathbf{e}_s(0)$ por la ecuación 34, para que todas las variables se valúen en $s = 0$ y $t = 0$, con objeto de omitir la dependencia respecto de s y t por brevedad en los desarrollos. Además, con $dv = BJ ds dn$ se obtiene:

$$\int_0^d \mathbf{e}_s(0) \cdot \left[g \nabla H + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right] \rho BJ ds dn = dF_{fs}$$

O bien, de acuerdo con el desarrollo de la ecuación 19 se tiene:

$$\int_0^d \left[\frac{1}{J} \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \right] g \rho BJ ds dn = dF_{fs} \quad (36a)$$

De igual manera, al tomar el producto escalar de la ecuación 34 por $\mathbf{e}_n$ resulta el segundo componente (según n):

$$\int_0^d \left[\frac{\partial H}{\partial n} + \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} \right] g \rho BJ ds dn = dF_{fn} \quad (36b)$$

c) Fuerza de resistencia al flujo

Para incluir el efecto total resistivo en las ecuaciones diferenciales, el procedimiento estándar en modelos como el de Saint-Venant consiste en aceptar una fuerza de cuerpo resistiva ficticia (por unidad de masa) distribuida a lo largo de cada capa delgada de líquido. El componente resultante de dicha fuerza para la capa entera debe ser igual al componente de la fuerza producida por los esfuerzos tangenciales actuando sobre el total del perímetro mojado. Una vez que la magnitud $\mathfrak{S}$ de esta fuerza de cuerpo ficticia (con dimensiones fuerza/masa) se determina en cada punto del flujo, se puede agregar como un término restrictivo adicional en el lado derecho de la ecuación del movimiento principal de la partícula elemental dm .

Por otra parte, la variación en la magnitud $\mathfrak{S}$ de la fuerza de cuerpo a través de la capa líquida no presenta problema. En efecto, debido a que cada partícula en cualquier sección vertical del modelo de Saint-Venant se comporta de la misma manera es obvio que cada una se ve afectada por la misma fuerza de cuer-

po resistiva y, por ello, la fuerza de cuerpo ficticia $\mathfrak{S}(x, y, t) \mathbf{i}$ debe ser de magnitud constante a lo largo de la capa delgada e igual a $F_x(x, t) / m$, donde $F_x \mathbf{i}$ es la fuerza cortante total ejercida por el perímetro mojado de la capa rectangular de longitud dx , y m es la masa total de líquido en esa capa.

Dressler y Yevjevich (1984) utilizaron el procedimiento antes descrito para determinar la magnitud apropiada de la fuerza de cuerpo resistiva ficticia e incluirla en las ecuaciones del flujo curvilíneo de Dressler. Para ello supusieron arbitrariamente que la fuerza de cuerpo análoga $\mathfrak{S} \cdot \mathbf{e}_s$ debería ser constante en la dirección n y que su magnitud se podía calcular dividiendo la fuerza tangencial resultante en la frontera entre la masa total afectada en una capa angular delgada (ilustración 4). Sin embargo, en el modelo del flujo curvilíneo no todas las partículas en una sección transversal plana se comportan idénticamente, ya que existe variación del componente w de la velocidad con s, n, t . Por tanto, es preferible emplear un análisis matemático sin suposición alguna para encontrar tanto el valor correcto de $\mathfrak{S}$ en las ecuaciones diferenciales del flujo curvilíneo como su variación funcional a través del flujo.

Se introduce ahora un segundo flujo donde no ocurren esfuerzos tangenciales en las fronteras, pero en cambio actúa una fuerza de cuerpo retardatoria en la dirección s , $\mathfrak{S}_s = \mathfrak{S}(s, n, t) \cdot \mathbf{e}_s(s)$, distribuida de tal manera que su acción resistiva produce las mismas condiciones en los campos de velocidad y presión que ocurren en el primer flujo, donde el VC está sujeto a esfuerzos tangenciales en las fronteras. La función desconocida $\mathfrak{S}$ se determina mediante otra aplicación de la ecuación de transporte de Reynolds al segundo flujo en la dirección s , resultando:

$$\int_0^d \left[\frac{g}{J} \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \right] \rho B(n) J(n) ds dn = \int_0^d \mathfrak{S}_s(n) J(n) B(n) \rho ds dn$$

Dado que la ecuación anterior y la 36a tienen términos idénticos en el lado izquierdo, se deduce que la expresión:

$$\int_0^d \mathfrak{S}_s(n) J(n) B(n) \rho ds dn = dF_{fs} \quad (37)$$

es la condición para integrar $\mathfrak{S}_s$ a partir de dF_{fs} para que las ecuaciones sean equivalentes.

La ecuación del movimiento principal según s para este segundo flujo se puede entonces escribir en la forma:

$$\frac{g}{J(s,n)} \frac{\partial H(s,n,t)}{\partial s} + \frac{\partial u(s,n,t)}{\partial t} = \mathfrak{S}_s(s,n,t)$$

donde aparece ahora la fuerza de cuerpo $\mathfrak{S}_s$ por unidad de masa. Para las partículas dm en el plano $s = 0$ y en $t = t_0$, la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{g}{J(n)} \frac{\partial H(n)}{\partial s} + \frac{\partial u(n)}{\partial t} = \mathfrak{S}_s(n)$$

donde ambos lados de la ecuación son funciones que varían con n y se puede también expresar en la forma:

$$g \frac{\partial H(0,t_0)}{\partial s} + J(n) \frac{\partial u(0,t_0)}{\partial t} = \mathfrak{S}_s(n) J(n) \quad (38)$$

Por un camino similar con el componente n se encuentran las ecuaciones equivalentes a la 37 y 38, que son:

$$\int_0^d \mathfrak{S}_n(n) J(n) B(n) \rho \, ds \, dn = dF_{fn} \quad (39)$$

$$g \frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial t} = \mathfrak{S}_n(n) \quad (40)$$

Las ecuaciones correctas del movimiento son entonces la 38 y la 40, donde la fuerza de cuerpo por unidad de masa tiene que calcularse con las ecuaciones 37 y 39, a partir de la fuerza total de resistencia F_r .

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera a considerar se establecen a continuación: para un líquido no viscoso, la velocidad de la partícula en cualquier punto del fondo ($n = 0$) debe ser tangencial al mismo, y para un punto en la superficie libre, $n = d(s, t)$, la presión es la atmosférica. Ambas condiciones se expresan como sigue:

$$w(s, 0, t) = 0 \quad (41)$$

$$p(s, d, t) = 0 \quad (42)$$

La única condición cinemática de frontera en la superficie libre consiste en que cualquier partícula en dicha superficie siempre permanece en ella. De este modo, con la función $\psi(s, n, t) = n - d(s, t)$ se define el movimiento de la superficie libre, de manera que el componente de la velocidad de la partícula superficial en dirección normal a la superficie libre móvil ($\psi = 0$) debe ser igual al componente de la velocidad también normal a dicha superficie.

El vector unitario normal a la superficie libre es $\mathbf{e}_\psi = \nabla \psi / |\nabla \psi|$. La velocidad en dirección normal a dicha superficie se define por $-(\partial \psi / \partial t) / |\nabla \psi|$ y es igual a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\psi$, es decir:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial d}{\partial t}$$

En el sistema coordenado (s, n) , el vector velocidad en la superficie libre se define en la forma: $\mathbf{v} = u_d \mathbf{e}_s + w_d \mathbf{e}_n$. Además, como expresa la ecuación 19, el segundo término vale:

$$\nabla \psi = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial s} \mathbf{e}_s + \frac{\partial \psi}{\partial n} \mathbf{e}_n = -\frac{1}{J_d} \frac{\partial d}{\partial s} \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_n$$

De este modo, al efectuar el producto escalar $\mathbf{e}_s \cdot \nabla \psi$, se obtiene:

$$-\frac{u_d}{J_d} \frac{\partial d}{\partial s} + w_d = \frac{\partial d}{\partial t}$$

donde J_d es el valor del jacobiano en la superficie libre y la condición de frontera en dicha superficie resulta:

$$w_d = \frac{u_d}{1 - \kappa d} \frac{\partial d}{\partial s} + \frac{\partial d}{\partial t} \quad (43)$$

El sistema de ecuaciones 28, 29 y 36 a 41 es el más preciso para la solución del flujo curvilíneo irrotacional sin fricción. La principal dificultad en resolver cualquier problema de flujo mediante dicho sistema no es tanto la no linealidad del mismo, sino el hecho de que la posición de la frontera superior del flujo (superficie libre) se desconoce y no se sabe de antemano dónde imponer la condición de frontera necesaria dada por las ecuaciones 41, 42 y 43, lo que constituye un ejemplo típico del llamado *problema de frontera libre*. En cambio, la gran virtud de las ecuaciones de Saint-Venant es que proporcionan un medio de solución para encontrar la posición aproximada de la superficie libre, ya que ésta aparece como una de sus incógnitas.

Ecuaciones diferenciales del flujo poco profundo

Restricciones

Por las razones antes mencionadas, es necesario restringir los flujos definidos por el sistema de ecuaciones antes obtenido a aquellos poco profundos o *someros*. Se puede demostrar que esto equivale a aceptar las condiciones siguientes:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (45)$$

$$|w| \ll |u| \quad (46)$$

La condición de frontera expresada por la ecuación 43 se debe satisfacer aun cuando se imponga la condición dada por la ecuación 46. Para el flujo permanente, $\partial d/\partial t = 0$ y la ecuación mencionada se convierte en:

$$\frac{\partial d}{\partial s} = (1 - \kappa d) \frac{w_d}{u_d}$$

La hipótesis de flujo poco profundo (ecuación 46) significa que $w_d/u_d \ll 1$, por tanto, de la anterior se cumple la condición:

$$\left| \frac{dd}{ds} \right| \ll |1 - \kappa d| \quad (47)$$

la cual será más precisa cuando $\kappa < 0$, es decir, se esperan mejores resultados de la teoría cuando el fondo sea convexo.

Componente principal de la velocidad (irrotacionalidad)

Con la ecuación 44, la ecuación 28 se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial n} (J u) = 0 \quad (48)$$

es decir, $J u = \text{constante}$ a lo largo de n , de modo que en el fondo ($n = 0$), $J = 1$ (ecuación 15) y $u = u_0(s, t)$ es el valor de dicha constante. Así, en la sección ortogonal al fondo de coordenada s , la velocidad en el punto P resulta al integrar la ecuación anterior y se obtiene:

$$u(s, n, t) = \frac{u_0(s, t)}{1 - \kappa n} \quad (49)$$

que equivale a la distribución típica de la velocidad en un vórtice libre o potencial, donde, al definir una sección $s = s_b$, el componente u depende sólo de n . En

efecto, se tendría que: $1 - \kappa n = 1 - \frac{n}{R} = \left(\frac{R-n}{R} \right) = \frac{r}{R}$;

donde r es la distancia del centro de curvatura al punto

P (ilustración 2) y a todos los puntos al mismo nivel de P , es decir, $u r = u_0 R = \text{constante}$. De este modo, la velocidad en el punto A sobre la superficie libre resulta:

$$u_d = \frac{u_0(s, t)}{1 - \kappa d} \quad (50)$$

El componente secundario de la velocidad se debe ajustar a las condiciones de frontera de que en el fondo sea $w_0 = 0$ y sobre la superficie libre satisfaga la ecuación 43, tomando en cuenta la ecuación 50, es decir:

$$w_d = \frac{u_0}{(1 - \kappa d)^2} \frac{\partial d}{\partial s} + \frac{\partial d}{\partial t} \quad (51)$$

Ecuación de continuidad.

Componente secundario de la velocidad

El gasto en la sección plana está dado por:

$$Q(s, t) = \int_0^d u B \, dn = u_0 \int_0^d \frac{B \, dn}{1 - \kappa n} = u_0 I_Q \quad (52)$$

donde se sustituyó la ecuación 49, siendo $B(s, n)$ la dimensión horizontal de la sección, que es una función conocida de s y n (ilustración 4); por tanto, el valor de la integral I_Q depende de la forma de la sección que adopte el canal. Además, con $Q = UA$ y $dA = B \, dn$, la media de la velocidad en la sección cumple con su definición:

$$U = \frac{1}{A} \int_0^d u \, dA = \frac{u_0}{A} I_Q \quad (53)$$

En las dos expresiones anteriores se ha utilizado la representación:

$$I_Q = \int_0^d \frac{B \, dn}{1 - \kappa n} \quad (54)$$

La ecuación de continuidad (29) se integra en toda la sección como sigue:

$$-\int_0^d d(B J w) = \int_0^d \frac{\partial}{\partial s} (B u) \, dn$$

donde $B u = B u(s, n, t)$. Siguiendo la regla de Leibniz en la segunda integral, la ecuación anterior se desarrolla en la forma:

$$-B_d J_d w_d + B_0 J_0 w_0 = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^d B u \, dn - B_d u_d \frac{\partial d}{\partial s}$$

Pero: $J_0 = 1$; $B_d = T(s, n, t)$ (ancho de la superficie libre); $w_0 = 0$, y tomando en cuenta las ecuaciones 43 y 52 resulta:

$$-T J_d w_d + B_0 w_0 = \frac{\partial Q}{\partial s} - T J_d w_d + T J_d \frac{\partial d}{\partial t}$$

También, con $w_0 = 0$ se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + T(1 - \kappa d) \frac{\partial d}{\partial t} = 0 \quad (55)$$

Esta ecuación es la de conservación de la masa en el VC, ya que $(\partial Q/\partial s)$ se interpreta como la tasa neta de variación del gasto que sale del VC en la longitud $J ds$ y $T(1 - \kappa d) ds (\partial d/\partial t)$ es la tasa neta de variación del almacenaje superficial en dicho volumen.

La derivada parcial de la ecuación 49 es:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u_0}{\partial s} \frac{1}{1 - \kappa n} + u_0 \frac{d\kappa}{ds} \frac{n}{(1 - \kappa n)^2} \quad (56)$$

y con ella se obtiene el término:

$$\frac{\partial B u}{\partial s} = B \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial B}{\partial s} u = \frac{\partial u_0}{\partial s} \frac{B}{1 - \kappa n} + u_0 \frac{d\kappa}{ds} \frac{B n}{(1 - \kappa n)^2} + \frac{\partial B}{\partial s} \frac{u_0}{1 - \kappa n}$$

Con éste, la ecuación de continuidad (29) se integra también como sigue:

$$B J w = - \int_0^n \frac{\partial B u}{\partial s} dn$$

donde se ha considerado la condición de que $w = 0$, para $n = 0$. Por tanto:

$$B J w = - \frac{\partial u_0}{\partial s} \int_0^n \frac{B dn}{1 - \kappa n} - u_0 \frac{d\kappa}{ds} \int_0^n \frac{B n dn}{(1 - \kappa n)^2} - u_0 \frac{\partial B}{\partial s} \int_0^n \frac{dn}{1 - \kappa n} \quad (57a)$$

Al ordenar términos, la ecuación anterior se convierte en:

$$B J w = -I_1 \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{d\kappa}{ds} I_2 u_0 + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial B}{\partial s} \ln(1 - \kappa n) u_0 \quad (57b)$$

donde se efectuaron las sustituciones que a continuación se mencionan. Las dos primeras integrales dependen de la forma de la sección y se designaron como sigue:

$$I_1 = \int_0^n \frac{B dn}{1 - \kappa n} \quad (58)$$

$$I_2 = \int_0^n \frac{B n dn}{(1 - \kappa n)^2} \quad (59)$$

La tercera integral no depende de la geometría de la sección y se sustituyó por:

$$\int_0^n \frac{dn}{1 - \kappa n} = -\frac{1}{\kappa} \ln(1 - \kappa n)$$

La solución de la ecuación 57 permite determinar la distribución del componente secundario de la velocidad; para obtenerla es necesario conocer la forma y geometría de la sección del canal (ilustración 3). La sección más común es la trapezoidal simétrica y ocasionalmente la circular; los valores de las integrales para la primera se obtienen en la parte 3 de esta serie de artículos.

Cuando se hace $n = d$ en la ecuación 57b, $w = w_d$, $J = J_d$, $B = T$, las integrales deben efectuarse entre los límites 0 y d , de manera que $I_1 = I_Q$. Por tanto, la ecuación se escribe en la forma:

$$T J_d w_d = -I_Q \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{d\kappa}{ds} [I_2]_0^d u_0 + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial s} \ln(1 - \kappa d) u_0 \quad (60)$$

Se sustituye la ecuación 51 en la anterior, se divide entre $T(1 - \kappa d)$ y con $J_d = 1 - \kappa d$ se obtiene:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{u_0}{(1 - \kappa d)^2} \frac{\partial d}{\partial s} + \frac{1}{T} \frac{I_Q}{1 - \kappa d} \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{1}{T} \frac{d\kappa}{ds} \frac{[I_2]_0^d}{1 - \kappa d} u_0 - \frac{1}{\kappa T} \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} u_0 = 0 \quad (61)$$

donde ya no aparece w_d y se tienen como incógnitas a u_0 y d .

Ecuación del movimiento transversal.
Distribución de la presión

De la condición 46 se deduce que $F_{fn} = \mathfrak{F}_n \approx 0$ en las ecuaciones 36b y 40; la ecuación resultante se convierte finalmente en $\partial H/\partial n = 0$ y de las ecuaciones 33, 46 y 49 resulta la ecuación equivalente a la de Bernoulli para las líneas de flujo que cruzan la sección plana ortogonal al fondo, que es:

$$H(s, t) = \zeta + n \cos \theta + \frac{p}{gp} + \frac{1}{(1-\kappa n)^2} \frac{u_0^2}{2g} = \text{constante} \quad (62)$$

La presión es cero en cualquier punto sobre la superficie libre, es decir, para $n = d$, $p = 0$; con ello, la energía en la ecuación anterior resulta igual a:

$$H(s, t) = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{(1-\kappa d)^2} \frac{u_0^2}{2g} \quad (63a)$$

O bien, de la ecuación 50 también es:

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{u_d^2}{2g} \quad (63b)$$

donde H es independiente de n al valuarse sobre la superficie libre y su magnitud es constante en la sección, ya que depende sólo de $d(s, t)$. La ecuación 63b significa que la energía cinética del flujo (cóncavo o convexo), calculada con el componente de la velocidad tangente a la superficie libre, separa a dicha superficie de la línea de energía.

Al substituir u_0 de la ecuación 52 en la ecuación 63a es válido también que:

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{I_0^2 (1-\kappa d)^2} \frac{Q^2}{2g} \quad (64)$$

Por otra parte, de la ecuación 62:

$$\frac{p}{gp} = H - \zeta - n \cos \theta - \frac{1}{(1-\kappa n)^2} \frac{u_0^2}{2g} \quad (65a)$$

O bien, al igualar las ecuaciones 62 y 63a resulta la expresión:

$$\frac{p}{gp} = (d-n) \cos \theta + \left[\frac{1}{(1-\kappa d)^2} - \frac{1}{(1-\kappa n)^2} \right] \frac{u_0^2}{2g} \quad (65b)$$

que define la distribución de la presión en la sección ortogonal al fondo, en términos de la parte hidrostática y la debida al efecto centrífugo, éste dado por el último término.

La carga de presión en el fondo del canal se obtiene para $n = 0$ y resulta:

$$\frac{p_0}{gp} = d \cos \theta + \left[(1-\kappa d)^{-2} - 1 \right] \frac{u_0^2}{2g} \quad (66)$$

Ecuación del movimiento principal

De la ecuación 49:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{1-\kappa n} \frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{1}{J} \frac{\partial u_0}{\partial t} \quad (67)$$

Con ésta, la ecuación 38 se convierte en:

$$g \frac{\partial H(0, t_0)}{\partial s} + \frac{\partial u_0(0, t_0)}{\partial t} = \mathfrak{S}_s(n) J(n)$$

que describe la variación de la velocidad en el fondo en términos de la fuerza de resistencia y de H , la cual está valuada mediante la ecuación 63b para la superficie libre e independiente de n . El lado izquierdo de la ecuación anterior es ahora independiente de la variable n , lo que significa que debe ser igual a una constante en $s = 0$, la que, a su vez, es la cantidad $\mathfrak{S}_s(0)$, igual a la fuerza de resistencia actuando sobre las partículas del fondo. De este modo $\mathfrak{S}_s(n) J(n) = \mathfrak{S}_s(0)$, lo que define que la variación funcional de $\mathfrak{S}_s$ debe ser:

$$\mathfrak{S}_s(n) = \mathfrak{S}_s(0) / J(n)$$

Por una parte, esto significa que al sustituir esta condición en la ecuación 37 e integrar a $\mathfrak{S}_s(n)$, resulta que:

$$\mathfrak{S}_s(0) = -g S_f = \frac{dF_{fs}}{\rho A ds} \quad (68)$$

donde $A = \int_0^d B dn$ es el área hidráulica de la sección y S_f se interpreta como la pendiente local del gradiente de fricción. Por otra parte, para incluir la fuerza de resistencia en la ecuación del movimiento principal en flujo curvilíneo poco profundo, sólo se necesita la fuerza $\mathfrak{S}_s(0) = -g S_f$ en el lado derecho de la ecuación; el lado izquierdo permanece sin cambio:

$$g \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial u_0}{\partial t} = -g S_f \quad (69a)$$

El término $\partial H / \partial s$ es la suma de los tres términos que se indican a continuación:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} = \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (d \cos \theta) &= -d \frac{d\theta}{ds} \sin \theta \\ &+ \cos \theta \frac{\partial d}{\partial s} = -\kappa d \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial d}{\partial s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left[(1-\kappa d)^{-2} \frac{u_0^2}{2g} \right] &= (1-\kappa d)^{-2} \frac{u_0}{g} \frac{\partial u_0}{\partial s} \\ &+ (1-\kappa d)^{-3} \left(\kappa \frac{\partial d}{\partial s} + d \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) \frac{u_0^2}{g} \end{aligned}$$

Al agrupar los términos, la ecuación 69a se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{u_0}{(1-\kappa d)^2} \frac{\partial u_0}{\partial s} + \left[g \cos \theta + \frac{\kappa u_0^2}{(1-\kappa d)^3} \right] \frac{\partial d}{\partial s} \\ - \left[g \kappa \sin \theta - \frac{\partial \kappa / \partial s}{(1-\kappa d)^3} u_0^2 \right] d \\ + g \sin \theta + g S_f = 0 \end{aligned} \quad (69b)$$

donde todos los términos representan a distintas fuerzas por unidad de masa.

Conclusiones

El sistema de ecuaciones no lineales (49, 50, 52, 57, 61, 65b, 66 y 69b) se puede resolver, pero antes habría que precisar algunos aspectos. Por ejemplo, habría que sustituir la solución de las integrales en las ecuaciones 65b y 69b de acuerdo con la forma de la sección. Además, la ecuación 55 es una forma simplificada de la 61 cuando se usa el gasto en lugar de la velocidad en el fondo. La ecuación 69a es también una forma más compacta de la 69b y según el tipo de problema puede ser más conveniente. Finalmente, la ecuación 69b está todavía incompleta, ya que es la única en la que se tiene que valorar la resistencia que oponen las fronteras rígidas al flujo, como se expone en la parte 2 de esta serie de artículos.

Después de resolver el par de ecuaciones diferenciales 61 y 69b para u_0 y d , las restantes expresiones permiten valorar a u , w y p . Los términos que contienen a $(d\kappa/ds)/\kappa^2$ en las dos ecuaciones diferenciales se mantienen finitos aun para $\kappa = 0$. En las ecuaciones de Saint-Venant se considera $w \equiv 0$, pero en el desarrollo de las ecuaciones presentadas se usó la condición de frontera de que una partícula que viaja sobre la superficie libre siempre permanece sobre ella. Esto significa que la condición de frontera dada por la ecuación 43 no queda satisfecha cuando se utiliza $w \equiv 0$ para $n < d$, al aceptar la ecuación 46. Sin embargo, el valor de w_d obtenido con la ecuación 60 y de u_d con la ecuación 50 modifican el vector velocidad total lo suficiente como para que la condición en la superficie libre se satisfaga. Esto significa, en el caso de flujo permanente, que la línea de corriente más elevada coincide con el perfil de la superficie libre obtenido en la solución de las ecuaciones 61 y 69b.

La magnitud de w_d es en general muy pequeña y poco afecta el valor de la carga de velocidad empleado en la ecuación 63b. Sin embargo, una vez conoci-

do, se puede calcular un valor más preciso de H mediante la ecuación 33, pero con los componentes al nivel de la superficie libre:

$$H(s, t) = \zeta + d \cos \theta + \frac{u_d^2 + w_d^2}{2g} \quad (56)$$

Simbología

- a** vector aceleración en un punto.
- d** distancia ortogonal del fondo hasta la superficie libre.
- e_s** vector unitario variable según s .
- e_n** vector unitario variable según n .
- e_y** vector unitario variable según y .
- g** aceleración de la gravedad.
- i** vector unitario según x .
- j** vector unitario según y .
- k** vector unitario variable según z .
- n** coordenada recta en el plano de una sección ortogonal al fondo y a s .
- p** presión en algún punto de la sección ortogonal al fondo y a s .
- p₀** presión en algún punto del fondo.
- r** vector de posición de un punto respecto del sistema (x, y, z) .
- s** coordenada curvilínea que sigue fielmente el fondo del canal.
- t** tiempo.
- u** componente de la velocidad en la dirección de s y perpendicular a una sección ortogonal al fondo.
- u₀** componente u de la velocidad en el fondo de la sección.
- u_d** componente u de la velocidad al nivel de la superficie libre de la sección.
- v** vector velocidad en un punto.
- v** componente de la velocidad en la dirección de y y tangente al plano de la sección ortogonal al fondo.
- w** componente de la velocidad en la dirección de n , normal a u y tangente al plano de la sección ortogonal al fondo.
- w_d** componente w de la velocidad en la superficie libre, en la dirección de n .
- x** eje coordenado en un plano horizontal perpendicular a y .
- y** coordenada recta en el plano de la sección, ortogonal a x , s y n .
- z** eje coordenado vertical.
- B** dimensión horizontal de la sección a la distancia n .
- F** fuerza resultante de las de cuerpo y de superficie.
- F_A** fuerza de cuerpo por unidad de masa obrando sobre la superficie A .
- F_c** fuerza de cuerpo por unidad de masa.

F_t	fuerza resultante.
F_f	fuerza de fricción.
J	jacobiano de la transformación del sistema coordenado fijo al curvilíneo.
H	energía total en una sección del flujo.
Q	gasto en la sección s y tirante d .
R	radio local de curvatura en el fondo.
S_f	pendiente local del gradiente de fricción.
T	ancho de la superficie libre de una sección.
U	velocidad media en la sección.
κ	curvatura del fondo en una sección ($1/R$).
ρ	densidad del líquido.
θ	ángulo de inclinación de la tangente al fondo de la sección respecto de la horizontal.
τ	torsión en un punto.
$\mathfrak{S}$	fuerza de cuerpo ficticia con los componentes $\mathfrak{S}_s$ (según s) y $\mathfrak{S}_n$ (según n).
ϕ	vector cualquiera.
∇	operador nabla.
Ω	función potencial del campo gravitacional.
v	volumen.
ξ	coordenada x que localiza a un punto cualquiera en el fondo.
ζ	coordenada z que localiza a un punto cualquiera en el fondo.

Agradecimiento

A la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México por el apoyo recibido para la realización de este trabajo.

Recibido: 20/08/2000

Aprobado: 17/10/2000

Referencias

- Dressler, R.F., "New nonlinear shallow-flow equations with curvature", *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, vol. 16, núm. 3, 1978, pp. 205-222.
- Dressler, R.F. y V. Yevjevich, "Hydraulic-resistance terms modified for the dressler curved-flow equations", *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, vol. 22, núm. 3, IAHR, noviembre de 1984, pp. 145-156.
- Khan, A.A. y P.M. Steffler, "Vertically averaged and moment equations model for flow over curved beds", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, vol. 122, núm. 1, enero de 1996, pp. 3-9.
- Sotelo, G. y R. Ruiz, "Flujo curvilíneo como un vórtice libre", *Memorias del XIII Congreso Nacional de Hidráulica de la Asociación Mexicana de Hidráulica*, tomo II, Ponencia 46, Puebla, septiembre de 1994, pág. 7.

Abstract

Sotelo Ávila, G. & C.A. Escalante Sandoval, "General equations for unsteady free-surface flow over curved beds", *Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish)*, vol. XVI, num. 2, pages 27-42, April-June, 2001.

Dressler (1978) derived the differential equations for unsteady shallow free surface-flow over curved beds in rectangular channels. Khan and Steffler (1996) derived, too, an analysis procedure based on vertically averaged and moment equations for flow over curved beds in a rectangular channel. They also used a more complex numerical method with a Petrov-Galerkin finite element scheme. On the other hand, the cross-sections of many open channels are of trapezoidal or circular shape, where both methods are not available or can not be adapted. This paper shows a generalization of curved flow equations in order to apply them to channels with any cross section shape, using a curvilinear, orthogonal coordinate system, based on the bed geometry and shallow flow hypothesis used by Dressler, to obtain simpler numerical solutions. The work is divided in three parts, of which this paper is the first one.

Key words: *curvilinear free-surface flow, curved bed surface flow, general equations of curved bed open channels.*

Dirección institucional de los autores:

Gilberto Sotelo Ávila

Correo electrónico: sotelo@servidor.unam.mx

Cerro Verde 59
Colonia Pedregal de San Francisco
Delegación Coyoacán
04320 México, D.F.
Teléfono (01) 5658 5510
Fax (01) 5658 5612

Carlos A. Escalante Sandoval

Correo electrónico: caes@servidor.unam.mx

División de Estudios de Posgrado
Facultad de Ingeniería
Apartado Postal 70-560
04511 México, D.F.
Teléfono (01) 5622 3279
Fax (01) 5616 1073