

La dimensionalidad de las funciones de distribución del tamaño de los poros y partículas del suelo

Carlos Fuentes

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Randel Haverkamp

Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement, Francia

Felipe Zataráin

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Peter Ross

CSIRO Land and Water, Australia

Antonio C.D. Antonino

Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

Con el argumento de que el contenido volumétrico de agua en el suelo es proporcional al volumen del cuerpo paralelo en geometría fractal, en la literatura se ha intentado ofrecer una explicación de la representación en potencia de la característica de humedad, que relaciona el contenido de agua y la presión del agua en el suelo, haciendo uso de la ley de Laplace que vincula la presión con el tamaño de poro; la potencia resulta ser igual a la codimensión, es decir, a la diferencia entre la dimensión euclidiana del espacio donde el suelo está embebido y su dimensión fractal. Esta argumentación sólo es válida cuando el valor absoluto de la presión es muy alto; es decir, cuando el tamaño de poro es muy pequeño. La utilización de este resultado para estimar la dimensión fractal del suelo a partir de la característica de humedad experimental ha inducido a valores no aceptables de la dimensión fractal debido a que los datos contienen información sobre valores grandes del tamaño de poro; la frontera precisa entre valores pequeños y grandes del tamaño de poro es difícil de definir. Por lo anterior, aquí se propone una formulación para estimar la dimensión fractal basada en la consideración de que las funciones de distribución del número de poros y del volumen de los poros aceptan funciones densidades, estableciendo una relación entre ellas. Se impone que las distribuciones microcanónicas proporcionadas por el formalismo fractal y válidas para valores pequeños del tamaño de los poros satisfacen la relación establecida entre sus densidades. La generalización empírica de la distribución microcanónica del volumen de los poros a todo el dominio de los tamaños de los poros es llamada distribución canónica; en esta última, el exponente no es necesariamente igual a la codimensión. La satisfacción de los límites teóricos de la dimensión fractal por la distribución canónica ha permitido obtener una expresión integral para el cálculo de la dimensión fractal, llamada dimensión fractal integral debido a la manera de cálculo. La dimensión fractal integral permite el paso entre funciones de distribución tan disímiles como las distribuciones simétricas de Gauss, Cauchy y la logística simétrica de Brutsaert. Asimismo, la dimensión fractal integral es el paso entre distribuciones asimétricas como la doble exponencial, la zeta y la logística asimétrica de van Genuchten. Puesto que la distribución de van Genuchten es ampliamente utilizada en hidrología de los suelos, ella se analiza con diferentes relaciones entre sus exponentes en 660 suelos de la base de datos GRIZZLY; se muestra que a pesar de que el producto de estos exponentes depende de la relación aceptada entre ellos, la dimensión fractal integral permanece invariante. Lo anterior viene a consolidar el hecho de que la dimensión fractal es una propiedad del suelo y su estimación a partir de la característica de humedad no debe depender fuertemente de la función utilizada para describirla adecuadamente.

Palabras clave: dimensión fractal integral, distribuciones simétricas, distribuciones asimétricas.

Introducción

En diferentes trabajos reportados en la literatura se ha aplicado el formalismo de la geometría fractal para intentar explicar el comportamiento en potencia de la característica de humedad del suelo argumentada experimentalmente por Brooks y Corey (1964):

$$S_e(\psi) = \frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left(\frac{\psi_{cr}}{\psi} \right)^\lambda \quad (1)$$

si $\psi < \psi_{cr}$ y $S_e(\psi) = 1$ si $\psi_{cr} \leq \psi$; en donde θ es el contenido volumétrico de agua en el suelo; θ_s , el contenido volumétrico de agua a saturación; θ_r , el contenido volumétrico de agua residual; S_e , un grado de saturación efectivo; ψ , la presión del agua en el suelo; ψ_{cr} , un valor crítico de la presión del agua en el suelo, y $\lambda \geq 0$ es un exponente empírico positivo llamado índice de los poros.

La ecuación 1 puede ser considerada como una distribución del tamaño de los poros si se utiliza la ley de Laplace:

$$\psi = - \frac{2\sigma \cos(\alpha)}{\rho_w g R} \quad (2)$$

donde R es el radio de los poros; σ , la tensión superficial en la interfaz agua-aire; ρ_w , la densidad del agua; g , la aceleración gravitacional, y α es el ángulo de contacto entre la interfaz y las partículas sólidas, considerado generalmente constante.

La combinación de las ecuaciones 1 y 2 conduce a:

$$S_e(R) = \left(\frac{R}{R_{cr}} \right)^\lambda \quad (3)$$

si $R < R_{cr}$ y $S_e(R) = 1$ si $R_{cr} \leq R$.

Basados en algunos modelos de fractales como el tapiz de Sierpinski, la esponja de Menger y otros fractales del tipo polvo de Cantor se ha sugerido que $\lambda = E - D$, donde D es la dimensión fractal y E es la dimensión del espacio euclidiano donde el conjunto fractal está embebido (Tyler y Wheatcraft, 1989, 1990; Rieu y Sposito, 1991a, 1992b). Por el solo hecho de que D y λ son positivos, Tyler y Wheatcraft (1992) consideran que los suelos donde $\lambda \geq E$ no presentan características fractales; sin embargo, esta conclusión puede ser limitada, ya que los autores aplican a todo el rango de escalas una ecuación válida en las pequeñas escalas.

El objetivo de este trabajo es proporcionar una expresión para estimar la dimensión fractal a partir de la distribución de los tamaños de los poros o de la distribución del tamaño de sus partículas.

Teoría

Se presentan de manera breve algunas definiciones del formalismo fractal.

Definiciones

Se define el tamaño $|U| = r$ de un subconjunto U no vacío de $\mathbb{R}^E$, donde E es la dimensión de Euclides (aquí $E=3$) y $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, como la más grande distancia entre un par de puntos x e y en U , i.e.: $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$. Si $\{U_i\}_r$ es una colección contable (finita o infinita) de conjuntos, cuyos tamaños son inferiores o iguales a r , que cubre un conjunto F , i.e.: F es un subconjunto de la unión de los conjuntos U_i , con $0 < |U_i| = r_i \leq r$, se dice que $\{U_i\}$ es una r -cubierta de F .

Para un subconjunto F de $\mathbb{R}^E$ se define la medida S -dimensional de Hausdorff de un subconjunto F de $\mathbb{R}^E$ por (Falconer, 1990):

$$H^S(F) = \liminf_{r \rightarrow 0} \left\{ \sum_i r_i^S : r_i = |U_i|; \{U_i\}, r\text{-cubierta de } F \right\} \quad (4)$$

donde S es un número no negativo, no necesariamente entero.

Si $S=E$, la ecuación 4 define la medida E -dimensional de Lebesgue. Existen subconjuntos del conjunto de los números reales, cuya cantidad de elementos es igual al propio conjunto de los números reales y que su medida de Lebesgue es cero. El ejemplo clásico es el conjunto perfecto de Cantor, un subconjunto del intervalo $[0,1]$. Este conjunto tiene entre sus propiedades la de no contener ningún intervalo; esto es, el conjunto de Cantor está formado sólo por puntos y cada uno de ellos es de acumulación. La medida de Lebesgue no hace diferencia entre un punto aislado y el conjunto de Cantor, los dos conjuntos tienen medida de Lebesgue igual a cero y sin embargo es importante poder hacer una diferencia entre estos dos conjuntos. También existen conjuntos que sin contener ningún intervalo tienen medida de Lebesgue positiva, ejemplos de estos conjuntos son los llamados conjuntos "gordos" de Cantor, que están formados sólo por puntos de acumulación.

La medida de Hausdorff es una medida más "fina" que la de Lebesgue, ya que permite hacer diferencia

entre puntos aislados y el "polvo" de Cantor. Es una medida capaz de diferenciar fractales. Un gráfico de $H^S(F)$ en función de S ($0 \leq S \leq E$) muestra que existe un valor crítico de S , donde la medida de Hausdorff salta de ∞ a 0 (e.g. Falconer, 1990). Este valor crítico $D = \dim(F)$ es llamado dimensión de Hausdorff-Besicovitch del conjunto F .

Si F es cubierto por una colección finita de conjuntos ($j=1, 2, \dots, N_r$) de la misma forma y tamaño (r), de la ecuación 4 se obtiene:

$$H^D = \lim_{r \rightarrow 0} [N_r r^D] \quad (5)$$

Utilizando esta relación y la continuidad de la función logaritmo, Mandelbrot (1983) define la dimensión fractal como sigue:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\log(N_r)}{\log(H/r)} \right] \quad (6)$$

Se puede demostrar que se satisface la desigualdad siguiente: $\dim(\text{Hausdorff}) \leq \dim(\text{Mandelbrot})$. La dimensión de Mandelbrot es fácil de calcular y usualmente aproxima rápidamente la dimensión de Hausdorff-Besicovich, que es difícil de calcular.

La ecuación 6 indica que si el suelo se considera como un objeto fractal, el número de conjuntos cubiertas de tamaño r es inversamente proporcional a r^D cuando $r \rightarrow 0$; es decir:

$$N_r = \left(\frac{H}{r} \right)^D \quad (7)$$

Se pueden construir conjuntos en los cuales el número de conjuntos cubiertas de radio r satisfaga de manera exacta la fórmula 7 para todo r , como el polvo de Cantor, el tapiz de Sierpinski y la esponja de Menger.

El cuerpo r -paralelo P_r de un conjunto F se define como $P_r(F) = \{x \in \mathbb{R}^E : |x - y| \leq r, y \in F\}$. El volumen del cuerpo paralelo se obtiene como el producto del volumen del conjunto cubierta; es decir, $c r^E$, donde c es un coeficiente de forma ($c=1$ si las cubiertas son paralelepípedos), y del número de cubiertas; es decir: $\text{vol}_E(P_r) = N_r c r^E$. Considerando la ecuación 7, se obtiene cuando $r \rightarrow 0$:

$$\text{vol}_E(P_r) = c H^E \left(\frac{r}{H} \right)^{E-D} \quad (8)$$

La ecuación 8 puede ser utilizada para estimar la dimensión fractal a partir del volumen del cuerpo paralelo. Esto es:

$$D = E - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log[\text{vol}_E(P_r) / c H^E]}{\log(r/H)} \quad (9)$$

Se hace notar que el volumen del cuerpo paralelo del fractal no es igual al volumen de la cáscara, esta última definida por: $C_r(F) = \{x \in \mathbb{R}^E - F : |x - y| \leq r, y \in F\}$.

La relación entre la dimensión fractal y la porosidad volumétrica total (ϕ) es proporcionada de acuerdo con Fuentes et al. (1996, 1998, 2001) por:

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad \text{con} \quad s = D/E \quad (10)$$

De la ecuación 10 se deducen los comportamientos extremos de la función $s(\phi)$. Cuando $\phi \rightarrow 0$: $s(\phi) = 1/2 + \ln(2)/\{2[1 + \ln(1/\phi)]\}$. Cuando $\phi \rightarrow 1$: $s(\phi) = 1 - \ln(2)/\{\ln[1/(1 - \phi)]\}$. En otros términos: $1/2 < s < 1$, o sea $E/2 < D < E$. Se pueden establecer los límites siguientes:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} D = \frac{E}{2} \quad (11)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 1} D = E \quad (12)$$

Expresión integral de la dimensión fractal

En los trabajos de Tyler y Wheatcreaft (1989, 1990, 1992), Rieu y Sposito (1991a, 1991b) podemos observar que la proporcionalidad entre el contenido volumétrico de agua y el volumen del cuerpo paralelo, $\theta(R) \propto R^{E-D}$, es aplicado sobre todo el dominio de variación de R ; sin embargo, la fórmula 8 es aplicable en general para valores pequeños de la escala R . Cuando esta proporcionalidad se utiliza para describir los datos experimentales de la característica de humedad, la estimación de la dimensión fractal puede ser afectada por el hecho de que los datos contienen también información sobre valores grandes de la escala R .

Puesto que las fórmulas 7 y 8 son aplicables cuando R es pequeño, serán llamadas distribuciones micro-cánónicas del número de poros (o de partículas) y de la distribución del tamaño de los poros (o de las partículas) y serán escritas de la manera siguiente:

$$N(R) = N_m \left(\frac{R_m}{R} \right)^D \quad (13)$$

$$F(R) = F_m \left(\frac{R}{R_m} \right)^{E-D} \quad (14)$$

donde $F(R)$ es el grado de saturación si se trata del volumen de los poros, o la frecuencia acumulada del tamaño de las partículas; $N_m = N(R_m)$ y $F_m = F(R_m)$ son parámetros a determinar.

La generalización empírica de la ecuación 14 a todo el rango de R será llamada distribución canónica del tamaño de los poros o de las partículas y será escrita como sigue (ver ecuación 3):

$$F(R) = \begin{cases} F_m \left(\frac{R}{R_m} \right)^\lambda; & R < R_{cr} \\ 1 & R_{cr} \leq R \end{cases} \quad (15)$$

en donde $R_m = R_{cr} F_m^{1/\lambda}$.

Para el estudio de funciones de distribución más generales se postula la hipótesis de que $N(R)$ y $F(R)$ admiten funciones densidades $n(R)$ y $f(R)$ definidas, de manera que:

$$N(R) = \int_R^\infty n(r) dr, \quad n(R) = -\frac{dN}{dR} \quad (16)$$

$$F(R) = \int_0^R f(r) dr, \quad f(R) = \frac{dF}{dR} \quad (17)$$

la función $F(R)$ se encuentra normalizada, es decir $F(\infty) = 1$.

Las funciones densidades pueden relacionarse considerando que el volumen de poros o de partículas en el intervalo $(R-dR/2, R+dR/2)$ es proporcionado, por una parte, por $cR^E n(R) dR$, donde c es un factor de forma ($c = \pi/6$ si R se considera como el diámetro de una esfera) y, por otra, por $cH^E f(R) dR$, donde $cH^E = V$ es el volumen total de los poros o de partículas en una unidad de masa de suelo. Se sigue que:

$$R^E n(R) = H^E f(R) \quad (18)$$

de la cual se infiere:

$$N(R) = \int_R^\infty \left(H/r \right)^E f(r) dr \quad (19)$$

$$F(R) = \int_0^R \left(r/H \right)^E n(r) dr \quad (20)$$

Las ecuaciones 13 y 14 satisfacen de manera exacta la ecuación 18 si:

$$DN_m R_m^E = (E - D) F_m H^E \quad (21)$$

De la ecuación 21, considerando la ecuación 19, se puede obtener una expresión integral para calcular la dimensión fractal, a saber:

$$\frac{E}{D} = 1 + \frac{1}{F_m} \int_{R_m}^\infty \left(R_m/R \right)^E f(R) dR \quad (22)$$

La ecuación 22 se vuelve una identidad con la introducción de la ecuación 14. Sin embargo su introducción no es posible, ya que la ecuación 14 sólo es válida para valores pequeños de R y su aplicación a valores grandes de R implica un crecimiento no acotado de $F(R)$.

La función de distribución que puede ser introducida en la ecuación 22 es la distribución canónica definida por la ecuación 15. Se obtiene:

$$\frac{E}{D} = 1 + \frac{1 - F_m^{E/\lambda - 1}}{E/\lambda - 1} \quad (23)$$

y cuando $\lambda = E$ se tiene $E/D = 1 + \ln(1/F_m)$.

Fácilmente se puede verificar que si $F_m \rightarrow 0$ en la ecuación 23, se obtiene precisamente el exponente de la distribución canónica: $\lambda = E - D$. Pero lo más importante es que se llega al mismo resultado si $\lambda \rightarrow 0$ a condición de que $F_m < 1$.

Considerando que $F_m < 1$, se puede establecer el límite siguiente:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} D = E \quad (24)$$

y en virtud de la ecuación 12 se deduce que:

$$\lim_{\phi \rightarrow 1} \lambda = 0 \quad (25)$$

Así, la condición $F_m < 1$ ha permitido encontrar el límite superior de la dimensión fractal.

Puesto que el intervalo de variación de λ es $0 < \lambda < \infty$, de la ecuación 23 se deduce:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{D}{E} = F_m \quad (26)$$

Para encontrar el límite inferior de la dimensión fractal definido por la ecuación 11 se deben satisfacer los límites siguientes:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} D = \frac{E}{2} \quad (27)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \lambda = \infty \quad (28)$$

La comparación de las ecuaciones 11 y 27 conduce a $F_m = 1/2$. Sin embargo, este resultado no significa que las distribuciones microcanónicas sean aplicables hasta $R = R_m$. De este modo, la dimensión fractal se puede calcular a partir de la función de distribución o de su función densidad utilizando la ecuación 22 con $F_m = F(R_m) = 1/2$.

Algunas funciones de distribución

La ecuación 22 puede ser utilizada para estimar la dimensión fractal a partir de funciones de distribución más generales. El procedimiento se ilustra con tres funciones simétricas y dos asimétricas.

Funciones de distribución simétricas

La distribución de Gauss

La distribución normal del logaritmo de las escalas puede ser escrita para la frecuencia acumulada como $F(\tau) = \frac{1}{2} [1 + \text{erf}(\beta\lambda\tau)]$, donde $\tau = \ln(R/R_m)$ y $\text{erf}(x)$ es la función error, y para la función densidad $p(\tau) = dF/d\tau = (\beta\lambda/\sqrt{\pi}) \exp[-(\beta\lambda\tau)^2]$, la cual es simétrica en τ . El parámetro β se deduce a partir de la condición de normalización $\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) d\tau = 1$, a saber $\beta = \sqrt{\pi}/2$. La función $F(R)$ se escribe como sigue:

$$F(R) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \text{erf} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \ln(R/R_m)^\lambda \right] \right\} \quad (29)$$

Esta distribución puede ser presentada en la forma usual con la introducción de la variancia definida por $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 p(\tau) d\tau = 2/\pi\lambda^2$.

La dimensión fractal se deduce de la ecuación 22:

$$D = \frac{E}{1 + \exp \left(\frac{E^2}{\pi\lambda^2} \right) \text{erfc} \left(\frac{E}{\lambda\sqrt{\pi}} \right)} \quad (30)$$

donde $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$ es la función error complemento.

La distribución de Cauchy

La distribución de Cauchy del logaritmo de las escalas puede ser escrita para la frecuencia acumulada como $F(\tau) = \frac{1}{2} [1 + \frac{2}{\pi} \arctan(\beta\lambda\tau)]$ con $\tau = \ln(R/R_m)$, y para la función densidad $p(\tau) = dF/d\tau = (\beta\lambda/\pi) / [1 + (\beta\lambda\tau)^2]$. El parámetro β se deduce de la condición de normalización: $\beta = \pi/2$. La función $F(R)$ es la siguiente:

$$F(R) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left[\frac{\pi}{2} \ln(R/R_m)^\lambda \right] \right\} \quad (31)$$

La dimensión fractal correspondiente se deduce de la ecuación 22:

$$D = \frac{E}{1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp \left[- (2E/\pi\lambda) t \right] (1+t^2)^{-1} dt} \quad (32)$$

donde $t = \pi\lambda\tau/2$.

La distribución de Brutsaert

La función densidad logística proporcionada por $p(\tau) = dF/d\tau = \lambda F(1-F)$ con $\tau = \ln(R/R_m)$, conduce a la distribución $F(\tau) = 1/[1 + e^{-\lambda\tau}]$. La función $F(R)$ corresponde a la distribución propuesta por Brutsaert (1967):

$$F(R) = \left[1 + (R_m/R)^\lambda \right]^{-1} \quad (33)$$

y la dimensión fractal correspondiente se obtiene de la ecuación 22:

$$D = \frac{E}{1 + 2 \int_0^\infty \exp[-(1+E/\lambda)t] \left[1 + e^{-t} \right]^{-2} dt} \quad (34)$$

donde $t = \lambda\tau$.

Una comparación entre las distribuciones presentadas es posible si sus parámetros son obtenidos de modo que la dimensión fractal sea la misma en todas las distribuciones. En la ilustración 1 se muestran las distribuciones con una dimensión fractal $D=2.5$; los parámetros correspondientes, calculados respectivamente con las ecuaciones 30, 32 y 34, son: a) Gauss $\lambda=0.6380$, b) Cauchy $\lambda=0.6973$ y c) Brutsaert $\lambda=1.2925$. Como puede observarse, la dimensión fractal las hace más o menos equivalentes en una vecindad alrededor de $F_m=1/2$. Es bien sabido que la distribución de Gauss permite la definición de los momentos de cualquier orden, mientras que la distribución de Cauchy ninguno; la dimensión fractal puede permitir el paso entre ambas distribuciones para el cálculo de sus parámetros.

Funciones de distribución asimétricas

La distribución doble exponencial

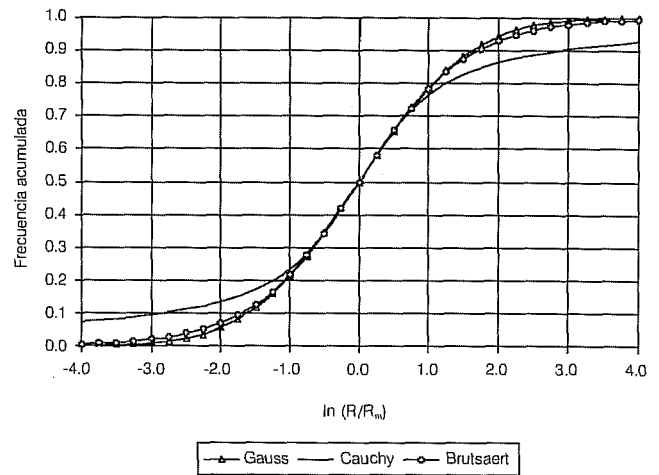
Considerando las propiedades de la función error, Fuentes (1992) propone la función de distribución asimétrica $F(\tau) = \text{erf}[\beta \exp(\lambda\tau)]$ con $\tau = \ln(R/R_m)$, cuya función densidad es $\rho(\tau) = dF/d\tau = (2\beta\lambda/\sqrt{\pi}) \exp[\lambda\tau - \beta^2 \exp(2\lambda\tau)]$. El parámetro β satisface la ecuación $1/2 = \text{erf}(\beta)$; es decir, $\beta = \text{inverfc}(1/2) \approx 0.4769$. La función $F(R)$ se escribe como sigue:

$$F(R) = \text{erf} \left[\beta (R/R_m)^\lambda \right] \quad (35)$$

y la dimensión fractal se obtiene de la ecuación 22:

$$D = \frac{E}{1 + \beta \exp(-\beta^2) \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^\infty \exp(-\beta^2 t) (1+t)^{-(1+E/\lambda)/2} dt} \quad (36)$$

Ilustración 1. Distribuciones simétricas caracterizadas con la dimensión fractal $D=2.5$. Parámetros: a) Gauss $\lambda=0.6380$, b) Cauchy $\lambda=0.6973$ y c) Brutsaert $\lambda=1.2925$.



donde $t = (R/R_m)^{2\lambda} - 1$.

La distribución zeta

Considerando las propiedades de la función $\zeta(s)$ de Riemann, se propone la siguiente función para $F(R)$ con dos parámetros de forma $\beta > 0$ y $\lambda > 0$:

$$F(R) = Z \left[\alpha (R/R_m)^\beta; 1 + \lambda/\beta \right] \quad (37)$$

con $Z(x;s)$, la función zeta incompleta normalizada definida por:

$$Z(x;s) = \frac{1}{\Gamma(s)\zeta(s)} \int_0^x \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \quad (38)$$

donde $s > 1$, $\Gamma(s)$ es la función gamma de Euler; $\alpha > 0$ es una función de λ/β , definida implícitamente por $Z(\alpha; 1 + \lambda/\beta) = 1/2$. Se debe observar que cuando $R \rightarrow 0$, la función definida por la ecuación 37 tiene el comportamiento $F(R) \propto (R/R_m)^\lambda$ de la distribución canónica.

La dimensión fractal se obtiene de la ecuación 22, a saber:

$$D = \frac{E}{1 + \frac{2\alpha^{1+\lambda/\beta}}{(\lambda/\beta)\Gamma(1+\lambda/\beta)\zeta(1+\lambda/\beta)} \int_0^\infty \frac{\exp[-(E/\lambda)t + (1+\beta/\lambda)t]}{\exp\{\alpha \exp[(\beta/\lambda)t]\} - 1} dt} \quad (39)$$

donde $t = \lambda n (R/R_m)$.

La distribución de van Genuchten

La función densidad logística asimétrica proporcionada por $p(\tau) = dF/d\tau = \lambda F(1-F^{1/m})$ con $\tau = \ln(R/R_m)$, conduce a la distribución $F(\tau) = [1 + (2^{1/m} - 1)e^{-m\tau}]^{-m}$, donde $n = \lambda/m$. La función $F(R)$ corresponde a la distribución propuesta por van Genuchten (1980):

$$F(R) = \left[1 + (R_d/R)^n \right]^{-m} \quad (40)$$

donde $R_d = R_m (2^{1/m} - 1)^{1/n}$.

La dimensión fractal correspondiente se obtiene de la ecuación 22:

$$D = \frac{E}{1 + 2 \left(2^{1/m} - 1 \right)^{-E/n} \int_{1/2}^1 F^{-E/mn} (1 - F^{1/m})^{E/n} dF} \quad (41)$$

Como puede observarse, la distribución de van Genuchten depende de dos parámetros de forma (m y n). Este autor propone dos relaciones entre los parámetros m y n para poder integrar de manera cerrada dos modelos de predicción de la conductividad hidráulica relativa, $m=1-1/n$ en el modelo de Mualem (1976) y $m=1-2/n$ en el modelo de Burdine (1953).

La comparación entre las distribuciones asimétricas para la dimensión fractal de $D=2.5$ se presenta en la ilustración 2. Los parámetros correspondientes, calculados respectivamente con las ecuaciones 36, 38 y 41, son: a) $\lambda=0.6639$ para la doble exponencial, b) $\beta=1$ y $\lambda=0.7130$ ($\alpha=0.6779$) para la distribución zeta, c1) $mn=0.7521$ para la distribución de van Genuchten-Mualem y c2) $mn=0.5895$ para la distribución de van Genuchten-Burdine. La dimensión fractal integral constituye el parámetro de paso entre las diferentes distribuciones.

Aplicaciones

Después de su publicación en 1980, la curva propuesta por van Genuchten para la característica de humedad es ampliamente utilizada en muchos trabajos de investigación. La ecuación 40, considerando la ecuación 2, se escribe como sigue:

$$\frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (42)$$

La relación entre m y n más utilizada es la recomendada por van Genuchten (1980), $m=1-1/n$; sin embargo, Fuentes et al. (1992), en sus estudios sobre el fenómeno de la infiltración, recomiendan utilizar la relación $m=1-2/n$; estas relaciones pueden ser generalizadas como $m=1-k/n$.

Puesto que la característica de humedad de van Genuchten tiene el comportamiento de la ecuación de Brooks y Corey, $\theta(\psi) \propto 1/|\psi|^{mn}$ cuando $\psi < \psi_d$, se debería esperar que $mn=n-k$, obtenido con el método de mínimos cuadrados a partir de los datos experimentales, fuera independiente de k . Se denota por $(mn)_k$ el valor del producto mn para un k fijo, obtenido mediante la minimización de la suma de cuadrados del error entre el contenido volumétrico calculado y medido. Los resultados de esta minimización en 660 suelos del catálogo GRIZZLY (Haverkamp et al., 1997), con los valores de $k=1, 2, 3$, muestra que existen diferencias significativas que se acentúan conforme mn crece. Los resultados se presentan en la ilustración 3, donde se puede constatar que: $(mn)_3 \leq (mn)_2 \leq (mn)_1$.

La dimensión fractal calculada con la ecuación 42 para las diferentes relaciones entre m y n es presentada en la ilustración 4. Se puede constatar que D_k es más o menos independiente de la relación entre m y n . Lo anterior era

Ilustración 2. Distribuciones asimétricas caracterizadas con la dimensión fractal $D=2.5$. Parámetros: a) Doble exponencial ($\lambda=0.6639$, b) zeta $\beta=1$ y $\lambda=0.7130$, c1) Van Genuchten-Mualem $mn=n-1=0.7521$ y c2) Van Genuchten-Burdine $mn=n-2=0.5895$.

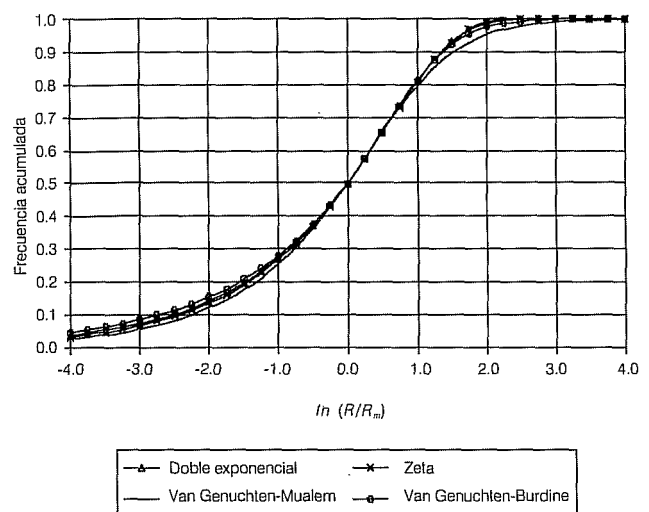


Ilustración 3. Diferentes relaciones $(mn)_k = n - k$ obtenidas en 660 suelos de la base GRIZZLY (Haverkamp et al., 1997). En el eje de las abscisas $k=2$; en el eje de las ordenadas $k=1, 2, 3$. Se puede constatar que: $(mn)_3 \leq (mn)_2 \leq (mn)_1$.

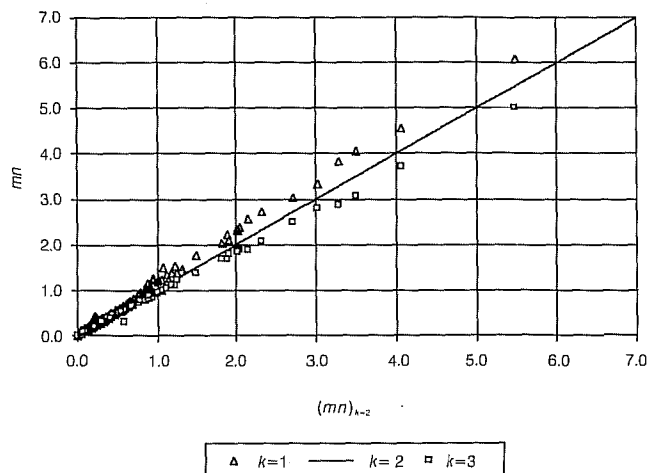
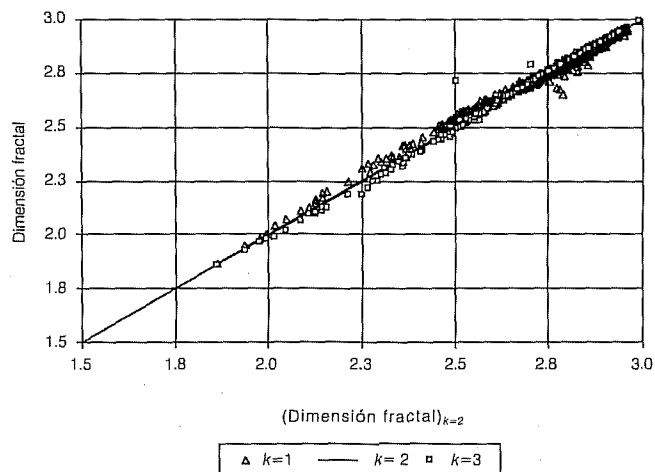


Ilustración 4. La dimensión fractal (D_k) calculada con diferentes relaciones $mn=n-k$ obtenidas en 660 suelos de la base GRIZZLY (Haverkamp et al., 1997). En el eje de las abscisas $k=2$; en el eje de las ordenadas $k=1, 2, 3$. D_k es independiente de la relación entre m y n .



de esperarse, ya que la dimensión fractal es, en principio, una propiedad intrínseca del suelo, y su estimación a partir de la curva característica de humedad no debe depender fuertemente de la naturaleza de sus parámetros si la curva analítica aceptada describe adecuadamente los datos experimentales. De este modo, la dimensión fractal integral se constituye en uno de los parámetros que caracterizan la geometría de los suelos.

Conclusiones

En la literatura se ha argumentado que el contenido volumétrico de agua en el suelo es proporcional al volumen del cuerpo paralelo, lo que ha inducido a ofrecer una explicación de la dependencia en potencia entre el contenido de agua y la presión del agua en el suelo, conocida como característica de humedad, haciendo uso de la ley de Laplace que relaciona la presión con el tamaño de poro. En particular, la potencia de esta dependencia se ha argumentado ser igual a la codimensión; es decir, a la diferencia entre la dimensión euclidiana del espacio donde el suelo está embebido y su dimensión fractal. Sin embargo, esta argumentación sólo es válida cuando el valor absoluto de la presión es muy alto; esto es, cuando el tamaño de poro es muy pequeño.

La utilización de la codimensión para estimar la dimensión fractal del suelo a partir de la característica de humedad experimental ha inducido a valores no aceptables de la dimensión fractal debido a que los datos

contienen información sobre valores grandes del tamaño de poro; la frontera precisa entre valores pequeños y grandes del tamaño de poro es difícil de definir.

Para salvar las dificultades planteadas, en este trabajo se ha propuesto una formulación para estimar la dimensión fractal basada en la consideración de que las funciones de distribución del número de poros y del volumen de los poros aceptan funciones densidades, y se ha establecido una relación entre ellas. Se ha aceptado que las distribuciones microcanónicas proporcionadas por el formalismo fractal y válidas para valores pequeños del tamaño de los poros satisfacen la relación establecida entre sus densidades. La generalización empírica de la distribución microcanónica del volumen de los poros a todo el dominio de los tamaños de los poros es llamada distribución canónica; en esta última, el exponente no es necesariamente igual a la codimensión. La satisfacción de los límites teóricos de la dimensión fractal por la distribución canónica ha permitido obtener una expresión integral para el cálculo de la dimensión fractal, llamada dimensión fractal integral debido a la manera de cálculo.

Se ha demostrado que la dimensión fractal integral permite hacer el paso entre funciones de distribución tan disímiles como las distribuciones simétricas de Gauss, Cauchy y la logística simétrica de Brutsaert. Asimismo, la dimensión fractal integral ha permitido el paso entre funciones asimétricas como la doble exponencial, la zeta y la logística asimétrica de van Genuchten, esta última en la versión de Mualem y de Burdine en razón de las diferentes relaciones entre sus exponentes.

Puesto que la distribución de van Genuchten es ampliamente utilizada en física de suelos, se ha analizado con diferentes relaciones entre sus exponentes en 660 suelos de la base de datos GRIZZLY (Haverkamp *et al.*, 1997). Se ha mostrado que a pesar de que el producto entre estos exponentes depende de la relación aceptada entre ellos, la dimensión fractal integral permanece invariante. Lo anterior consolida el hecho de que la dimensión fractal es una propiedad del suelo y su estimación a partir de la curva característica de humedad no debe depender fuertemente de la naturaleza de sus parámetros si la curva analítica aceptada describe adecuadamente los datos experimentales.

Recibido: 22/05/2003
Aprobado: 23/09/2003

Referencias

- BROOKS, R.H. y COREY, A.T. Hydraulic properties of porous media. *Hydrol. Pap.* 3, Colo. State Univ., Fort Collins, 1964.
- BRUTSAERT, W. Some methods of calculating unsaturated permeability. *Trans. ASAE*. Vol. 10, 1967, pp. 400-404.
- BURDINE, N.T. Relative permeability calculation from size distribution data. *Trans. AIME*. Vol. 198, 1953, pp. 71-78.
- FALCONER, K. *Fractal geometry, mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 1990, 288 pp.
- FUENTES, C. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*. Tesis de doctorado por la Université Joseph Fourier de Grenoble, France, 1992, 267 pp.
- FUENTES, C., HAVERKAMP, R. y PARLANGE, J.-Y. Parameter constraints on closed-form soil water relationships. *J. of hydrology*. Vol. 134, 1992, pp. 117-142.
- FUENTES, C., VAUCLIN, M., PARLANGE, J.-Y. y HAVERKAMP, R. A note on the soil-water conductivity of a fractal soil. *Transport in Porous Media* 23, 1996, pp. 31-36.
- FUENTES, C., VAUCLIN, M., PARLANGE, J.-Y. y HAVERKAMP, R. Soil-water conductivity of a fractal soil. *Fractals in soil science*. Editado por Ph. Baveye, J.-Y. Parlange y B.A. Stewart. Boca Raton: CRC Press, 1998, pp. 333-340.
- FUENTES, C., BRAMBILA, F., VAUCLIN, M., PARLANGE, J.-Y. y HAVERKAMP, R. Fractal modeling of hydraulic conductivity in non-saturated soil. *Hydraulic engineering in Mexico* (in Spanish). Vol. 16, núm. 2, 2001, pp. 119-137.
- HAVERKAMP, R., ZAMMIT, C., BOURAOUI, F., RAJKAI, K., ARRÚE, J.L. y HECKMANN, N. GRIZZLY. *Grenoble soil catalogue: soil survey of field data and description of particle size, soil water retention and hydraulic conductivity functions*. Grenoble, Francia : Laboratoire d'Étude des Transferts en Hydrologie et Environnement (LTHE), 1997.
- MANDELBROT, B.B. *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco, 1983.
- MUALEM, Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resources Res.* Vol. 12, 1976, pp. 513-522.
- RIEU, M. y SPOSITO, G. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I. Theory. *Soil Sci. Soc. Am. J.* Vol. 55, 1991a, pp. 1231-1238.
- RIEU, M. y SPOSITO, G. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: II. Applications. *Soil Sci. Soc. Am. J.* Vol. 55, 1991b, pp. 1239-1244.
- TYLER, S.W. y WHEATCRAFT, S.W. Application of fractal mathematics to soil water retention estimation. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 53, núm. 4, 1989, pp. 987-996.
- TYLER, S.W. y WHEATCRAFT, S.W. Fractal processes in soil water retention. *Water Resources Research*. Vol. 26, núm. 5, 1990, pp. 1047-1054.
- TYLER, S.W. y WHEATCRAFT, S.W. Fractal scaling of soil particle size distributions: analysis and limitations. *Soil Sci. Soc. Am. J.* Vol. 56, núm. 2, 1992, pp. 362-369.
- VAN GENUCHTEN, M.Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* Vol. 44, 1980, pp. 892-898.

Abstract

FUENTES, C., HAVERKAMP, R., ZATARÁIN, F., ROSS, P. & ANTONINO, A.C.D. Distribution functions dimensionality of soil pore and particle sizes. Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. XIX, no. 3, July-September, 2004, pp. 5-14.

The argument that soil volumetric water content is proportional to the volume of the parallel body in fractal geometry has been used in the literature to give an explanation of the power representation of the moisture characteristic, which relates water content and soil water pressure by using Laplace's law, which, in turn, relates soil water pressure to pore size; the power is equal to the codimension, i.e. the difference between the Euclidean dimension of space, in which the soil is imbedded, and its fractal dimension. This assessment is only valid when the absolute value of soil water pressure is high, i.e. when the pore size is small. Using this result to estimate the soil fractal dimension from the experimental moisture characteristic has yielded unacceptable fractal dimension values, which result from large pore size values in the data; the precise boundary between large and small pore size values is difficult to assess. Therefore, an approach is being proposed which estimates the fractal dimension based on the fact that the pore number and pore volume distribution functions accept density functions, establishing a link between them. It is imposed that the microcanonical distributions supplied by fractal formalism, valid for small pore size values, satisfy the relationship established between its densities. The empirical generalization of the pore volume microcanonical distribution over the full pore size domain is called canonical distribution; in the latter, the exponent is not necessarily equal to the codimension. By satisfying the theoretical boundaries of the fractal dimension based on the canonical distribution, it is possible to obtain an integral expression to calculate the fractal dimension, called an integral fractal dimension due to the way it is calculated. The integral fractal dimension allows to move through distinct distribution functions, such as Gauss's, Cauchy's, and Brutsaert's symmetrical logistics. The integral fractal dimension is the link between asymmetrical functions, such as the double exponential, zeta, and asymmetrical logistics. Since the van Genuchten distribution is widely used in soil hydrology, it is analyzed using different relationships among its exponents from the 660 soil types found in the GRIZZLY database; it is shown that the integral dimension function stays constant, although the product of the exponents depends on the accepted relationship among them. This supports the fact that the fractal dimension is a soil property, and should not depend on the accepted theoretical curve that represents the moisture characteristic.

Keywords: integral fractal dimension, symmetrical distributions, asymmetrical distributions.

Dirección institucional de los autores:

Dr. Carlos Fuentes
M. en C. Felipe Zataráin

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,
Coordinación de Tecnología de Riego y Drenaje,
Paseo Cuauhnáhuac 8532,
colonia Progreso,
62550 Jiutepec, Morelos, México,
cfuentes@tlaloc.imta.mx
fzata@tlaloc.imta.mx

Dr. Randel Haverkamp

Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement
UMR 5564 (CNRS, INPG, IRD, UJF),
BP 53, 38041 Grenoble- Cedex, France.
randel@hmg.inpg.fr

Dr. Peter Ross

CSIRO Land and Water,
Indooroopilly, Qld. 4067, Australia.
Peter.Ross@csiro.au

Dr. Antonio C.D. Antonino

Departamento de Energia Nuclear da Universidade Federal de
Pernambuco,
Av. Prof. Luz Freire 1000, Cid. Universitária, CEP 54740-540 Recife,
PE, Brasil.
acda@ufpe.br